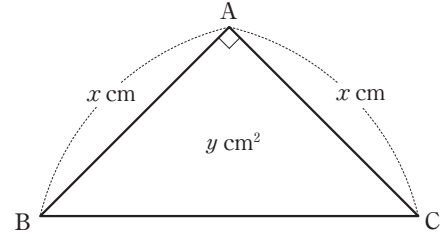


14 2乗に比例する関数

学習日 月 日

ポイント ① y が x の2乗に比例する関数について、学習しよう。

Q 右の図のような、 $AB=AC$ の直角二等辺三角形があります。 $AB=AC=x$ cmとしたときの $\triangle ABC$ の面積を y cm^2 とすると、 x と y の関係について、調べてみよう。



A y を x の式で表すと、 $y = \frac{1}{2}x^2$ となります。

この式にあてはめて、 x の値に対応する y の値がどのように変化するかを調べると、次のようになります。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	18	$\frac{49}{2}$	32	$\frac{81}{2}$	50

Annotations: 2倍 (1 to 2), 3倍 (2 to 3), 4倍 (1 to 4), 9倍 (1 to 9)

このように、 $y = \frac{1}{2}x^2$ では、 x の値が n 倍になると、 y の値は n^2 倍になります。

ここで、 $y = \frac{1}{2}x^2$ の x の値を負の数まで拡張して考えても、やはり同じ結果になります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

Annotations: 2倍 (-2 to -4), 4倍 (2 to 4), 4倍 (-4 to 4), 16倍 (1 to 4)

◆ 2乗に比例する関数 ◆

2つの量 x 、 y の間に、 $y = ax^2$ (a は定数)という関係があるとき、 y は x^2 に比例するといい、 a を比例定数といいます。

例題 y は x の2乗に比例し、 $x=2$ のとき、 $y=8$ です。 $x=-4$ のときの y の値を求めなさい。

解き方 y が x の2乗に比例するときには、比例定数を a とすると、 $y = ax^2$ が成り立ちます。

まず、この式に x 、 y の値を代入して、 a の値を求めます。

$$y = ax^2 \text{ に } x=2, y=8 \text{ を代入すると、} 8 = a \times 2^2$$

$$a = 2$$

したがって、 x と y の関係式は、 $y = 2x^2$

$x = -4$ のときの y の値は、 $y = 2x^2$ に $x = -4$ を代入して、

$$y = 2 \times (-4)^2 = 32$$

チェック A y が x の2乗に比例する関数について、学習しよう。

1 半径 x cm の円の面積を y cm² とするとき、次の問いに答えなさい。(円周率は π とします。)

*□(1) y を x の式で表しなさい。

$y =$

□(2) (1)の関数の比例定数を答えなさい。

.....

□(3) 次の対応表を完成しなさい。

x	1	2	3	4	5	6
y						

2 次の問いに答えなさい。

*□(1) 関数 $y=3x^2$ で、 $x=2$ のときの y の値を求めなさい。

$y =$

□(2) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ で、 $x = -4$ のときの y の値を求めなさい。

$y =$

*□(3) 関数 $y=x^2$ で、 y の値が4となるような x の値をすべて求めなさい。

$x =$

チェック B y が x の2乗に比例する関数の比例定数の求め方を練習しよう。

1 次の問いに答えなさい。

*□(1) y は x の2乗に比例し、 $x=1$ のとき、 $y=3$ です。 y を x の式で表しなさい。

$y =$

*□(2) y は x の2乗に比例し、 $x=2$ のとき、 $y=-4$ です。 y を x の式で表し、 $x=-3$ のときの y の値を求めなさい。

$y =$

$y =$

□(3) y は x の2乗に比例し、 $x=3$ のとき、 $y=3$ です。 $x=6$ のときの y の値と、 $y=6$ となる x の値をそれぞれ求めなさい。

$y =$

$x =$

Q 次の関数のグラフをかき、その特徴を調べてみよう。

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad y = -\frac{1}{2}x^2$$

A x と y の対応表をつくり、 x 、 y の値の組を座標とする点をとります。

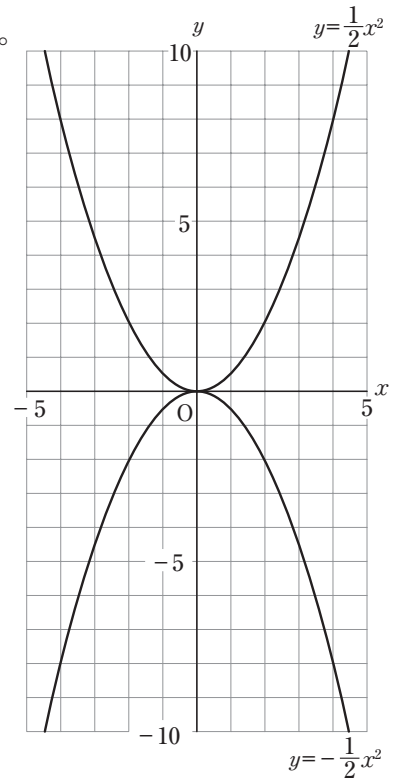
$$y = \frac{1}{2}x^2$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8

さらに細かく点をとっていくと、右のグラフのような、なめらかな曲線となります。



◆ $y = ax^2$ のグラフの特徴◆

- $y = ax^2$ のグラフを放物線という。放物線の対称軸を、放物線の軸、放物線と放物線の軸との交点を頂点といいます。
 - ① 原点を通り、 y 軸について対称です。
 - ② $a > 0$ のとき、上に開き、 $a < 0$ のとき、下に開きます。

Q 次の関数の y の変域を、グラフを利用して調べてみよう。

$$y = x^2 \quad (-3 \leq x \leq 2) \qquad y = -\frac{1}{4}x^2 \quad (-2 \leq x \leq 4)$$

A 関数 $y = x^2$ で、 $x = -3$ のとき、 $y = 9$

$$x = 2 \text{ のとき、} y = 4$$

よって、 $y = x^2$ ($-3 \leq x \leq 2$)のグラフは、右の図の放物線の実線部分となります。

→ 関数 $y = x^2$ で、 $-3 \leq x \leq 2$ のときの y の変域は、

$$0 \leq y \leq 9$$

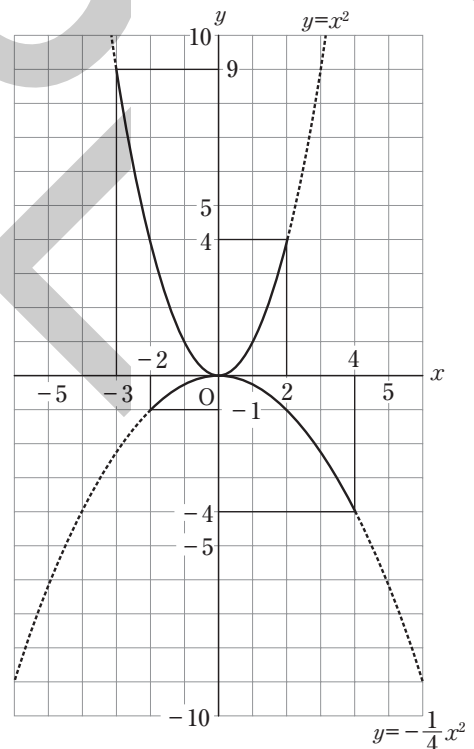
$$\text{関数 } y = -\frac{1}{4}x^2 \text{ で、} x = -2 \text{ のとき、} y = -1$$

$$x = 4 \text{ のとき、} y = -4$$

よって、 $y = -\frac{1}{4}x^2$ ($-2 \leq x \leq 4$)のグラフは、右の図の放物線の実線部分となります。

→ 関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ で、 $-2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域は、

$$-4 \leq y \leq 0$$



チェック A $y = ax^2$ のグラフをかき、その特徴を調べよう。

1 次の問いに答えなさい。

(1) 次の関数のグラフをかきなさい。

* ① $y = 2x^2$

② $y = -2x^2$

* ③ $y = \frac{3}{4}x^2$
($-4 \leq x \leq 3$)

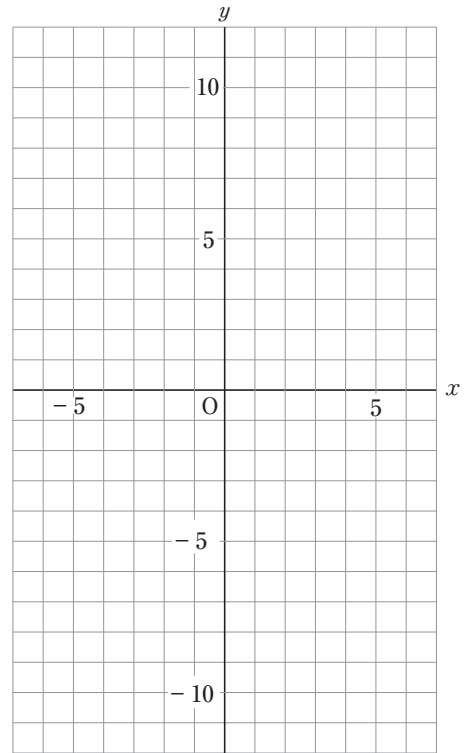
④ $y = -\frac{1}{3}x^2$
($-3 \leq x \leq 6$)

(2) (1)の①と②のグラフは、どんな位置関係にありますか。

* (3) (1)の③と④のグラフで、 y の変域を求めなさい。

③ $\leq y \leq$

④ $\leq y \leq$



チェック B 放物線についての問題を練習しよう。

1 右の放物線について、次の問いに答えなさい。

* (1) ①～④の放物線の式をそれぞれ求めなさい。

① $y =$

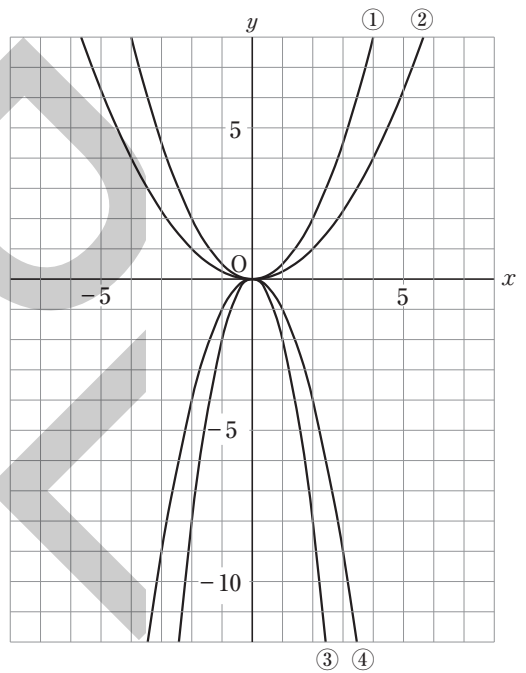
② $y =$

③ $y =$

④ $y =$

* (2) $x > 0$ の範囲で、 x の値が増加すると y の値も増加するものを選びなさい。

(3) $x < 0$ の範囲で、 x の値が増加すると y の値も増加するものを選びなさい。



2 次の問いに答えなさい。

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の点で、 x 座標が 3 である点の y 座標を求めなさい。

* (2) 点 $(-3, 6)$ を通る放物線の式を求めなさい。

$y =$

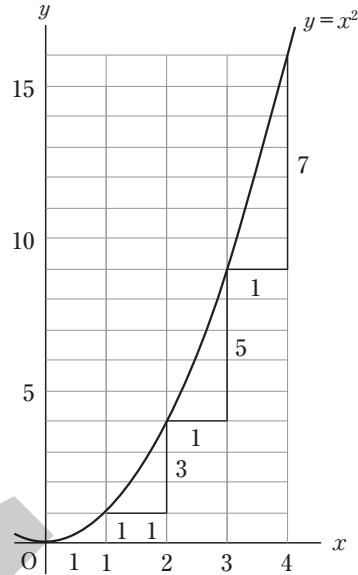
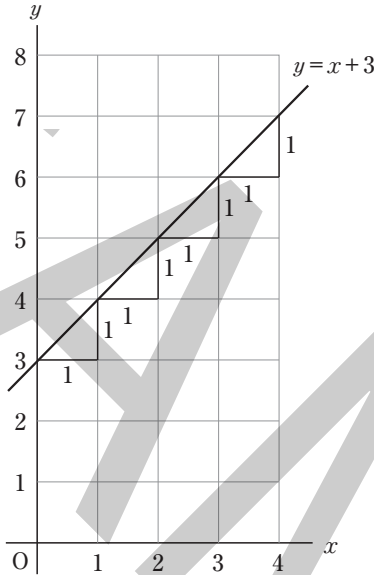
Q 次の2つの関数について、 x の値が1ずつ増加したときの y の値の増加量を調べてみよう。

$$y = x + 3 \qquad y = x^2$$

A x の増加量に対する y の増加量の割合を、変化の割合といました。

つまり、変化の割合 = $\frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}}$ です。

グラフ上の、 $x > 0$ の範囲でみると、次のようになります。



以上から、関数 $y = x + 3$ の変化の割合は一定ですが、関数 $y = x^2$ の変化の割合は、どの値からの値まで増加するかによって、異なってくるのがわかります。

例題 次の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の値が2から6まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
- (2) 関数 $y = ax^2$ について、 x の値が1から3まで増加するときの変化の割合は -2 です。 a の値を求めなさい。

解き方 変化の割合 = $\frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}}$ です。

(1) x の増加量 = $6 - 2 = 4$ ……①

$$\begin{array}{l} x=2 \text{ に対応する } y \text{ の値} = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2 \\ x=6 \text{ に対応する } y \text{ の値} = \frac{1}{2} \times 6^2 = 18 \end{array} \quad \rightarrow y \text{ の増加量} = 18 - 2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{変化の割合} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} = \frac{16}{4} = 4$$

(2) x の増加量 = $3 - 1 = 2$ ……①

$$\begin{array}{l} x=1 \text{ に対応する } y \text{ の値} = a \times 1^2 = a \\ x=3 \text{ に対応する } y \text{ の値} = a \times 3^2 = 9a \end{array} \quad \rightarrow y \text{ の増加量} = 9a - a = 8a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{変化の割合} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} = \frac{8a}{2} = 4a \rightarrow 4a = -2 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

チェック A 関数の変化の割合について学習しよう。

1 関数 $y = x^2$ について、次の問いに答えなさい。

(1) $x = 2$, $x = 5$ に対応する y の値をそれぞれ求めなさい。

$x = 2$ に対応する y の値 = _____ , $x = 5$ に対応する y の値 = _____

(2) x の値が 2 から 5 まで増加するときの y の増加量を求めなさい。

* (3) x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

2 関数 $y = -x^2$ について、 x の値が次のように増加するとき、① x の増加量、② y の増加量、③ 変化の割合をそれぞれ求めなさい。

(1) 3 から 5

* (2) -4 から -1

① _____
② _____
③ _____

① _____
② _____
③ _____

チェック B 関数の変化の割合について学習しよう。

1 次の問いに答えなさい。

* (1) 関数 $y = 2x^2$ について、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(2) 関数 $y = -2x^2$ について、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(3) 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ について、 x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

* (4) 関数 $y = ax^2$ について、 x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合は 1 です。 a の値を求めなさい。

$a =$ _____

練 成 問 題

1 次の問いに答えなさい。

ポイント 1

*□(1) y は x の 2 乗に比例し、 $x=2$ のとき、 $y=3$ です。 y を x の式で表しなさい。

$y =$

□(2) y は x の 2 乗に比例し、 $x=3$ のとき、 $y=-9$ です。 y を x の式で表しなさい。

$y =$

□(3) y は x の 2 乗に比例し、 $x=-3$ のとき、 $y=12$ です。 $x=2$ のときの y の値を求めなさい。

$y =$

2 下のア、イの関数について、次の問いに答えなさい。

ポイント 2

ア $y=x^2$ イ $y=-\frac{1}{4}x^2$

*□(1) ア、イの関数のグラフを、右の図にかきなさい。

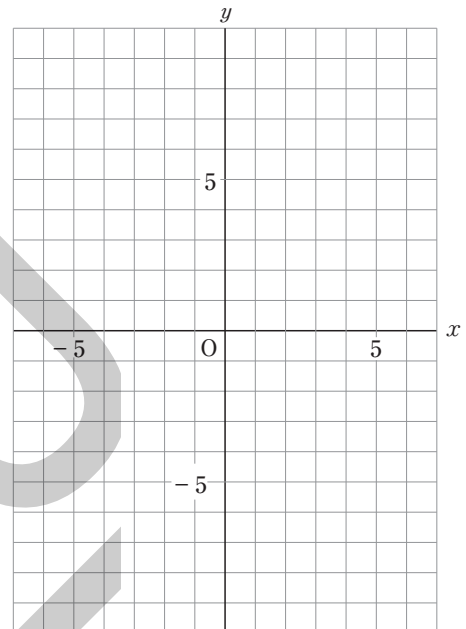
□(2) $x>0$ の範囲で、 x の値が増加すると、 y の値は減少するのはどちらですか。

*□(3) 関数 $y=x^2$ の x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域を求めなさい。

.....
 $\leq y \leq$

□(4) 関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ の x の変域が $-6 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域を求めなさい。

.....
 $\leq y \leq$



3 次の問いに答えなさい。

ポイント 3

□(1) 関数 $y=3x^2$ について、 x の値が次のように変化するときの変化の割合を求めなさい。

*□① 1 から 2 まで

□② -1 から 2 まで

□(2) 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について、 x の値が次のように変化するときの変化の割合を求めなさい。

*□① 2 から 4 まで

□② -2 から 6 まで

*□(3) 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が -1 から 3 まで増加するときの変化の割合は 8 です。このとき、 a の値を求めなさい。

$a =$

1 y は x の 2 乗に比例し、 $x=4$ のとき、 $y=-32$ です。次の問いに答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。
- (2) $x=-3$ のときの y の値を求めなさい。
- (3) $y=-8$ となる x の値を求めなさい。

1 【各5点×3】

(1)	$y =$
(2)	$y =$
(3)	$x =$

2 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) x の変域が次の①、②のとき、 y の変域を求めなさい。
 - ① $2 \leq x \leq 4$
 - ② $-2 \leq x \leq 6$
- (2) $x > 0$ の範囲で、 x の値が増加すると y の値は増加するか、それとも減少するか答えなさい。

2 【各5点×3】

(1)	①	$\leq y \leq$
(2)	②	$\leq y \leq$

3 次の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = -x^2$ について、 x の値が次のように変化するときの変化の割合を求めなさい。
 - ① -3 から -1 まで
 - ② -1 から 2 まで
 - ③ 2 から 5 まで
- (2) 関数 $y = ax^2$ について、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合は -3 です。このとき、 a の値を求めなさい。

3 【各5点×4】

(1)	①
(1)	②
	③
(2)	$a =$