18 円周角の定理の補充 P100~103

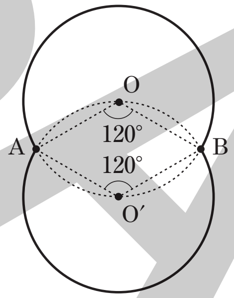
P100

1 (1) $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, $\angle BAD = \angle DCE$の3通り。

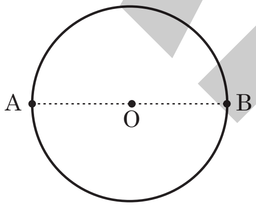
この他，$\angle ADB = \angle ACB$，$\angle ABD = \angle ACD$, $\angle DAC = \angle DBC$,

$\angle ADC + \angle ABC = 180°$などを答えてもよい。

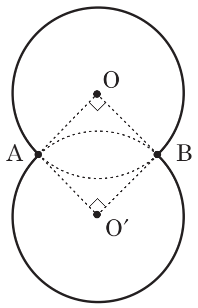
(2)①



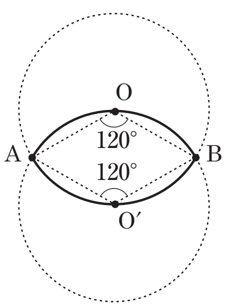
②



③



④



2 (1) $x = 180° - b$, $y = b$, $z = 180° - b$

(2) まず，$\angle AEF = \angle ADF$である。

次に，$AD /\!/ BC$より，$\angle FBC = \angle ADF$

したがって，$\angle AEF = \angle FBC$となる。よって，四角形FBCEは円に内接する。

(3) $AM /\!/ DC$より，$\angle MAN = \angle ACD$，また，$AB /\!/ DN$より，$\angle ABD = \angle MDN$

ところが，$\angle ABD = \angle ACD$より，$\angle MAN = \angle MDN$

よって，四角形AMNDは円に内接する。

すると，$\angle ANM = \angle ADM$

これとは別に，$\angle ADM = \angle ACB$だから，$\angle ANM = \angle ACB$

よって，$MN /\!/ BC$となる。

P101

3 (1) $\angle BEC = \angle BDC = 90°$だから，四角形BCDEは円に内接し，円の中心はBCの中点，つまりMである。よって，$MD = ME$となり，$\triangle MDE$は二等辺三角形である。

(2) 上の(1)と同様に，四角形BCDEは円に内接し，円の中心はMである。

ところが，$\angle ABD = 180° - (60° + 90°) = 30°$より，$\angle DME = 30° \times 2 = 60°$

すると，$\triangle DEM$は$MD = ME$で$\angle DME = 60°$となり，正三角形である。

(3) $\angle MDE = 70°$，$\angle A = 70°$

解説

3 (3) 四角形EBCDはMを中心とする円の内接四角形となり，ME，MDは円の半径となる。$\triangle MDE$で$\angle MDE = (180° - 40°) \div 2 = 70°$，$\triangle ABD$で，$\angle ABD = 40° \div 2 = 20°$，$\angle ADB = 90°$より，$\angle A = 180° - 20° - 90° = 70°$

4 (1) $\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ だから，$\angle ECF=\angle EDF=90^\circ$

つまり，$\angle ECF+\angle EDF=180^\circ$ だから，四角形ECFDは円に内接する。

すると，CとDを結べば，$\angle EFD=\angle ECD$

ところが，半円Oに内接する四角形CABDにおいて，$\angle ECD=\angle ABD$

よって，$\angle EFD=\angle ABD$

(2) **3** (1)と同様に，四角形AKHBは円に内接し，円の中心はMである。

よって，MK=MHより，

$\angle MHK=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle KMH)$

また，$\angle CAH=\frac{1}{2}\angle KMH$だから，

$\angle ACB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle KMH$

よって，$\angle MHK=\angle ACB$

(3) **4** (1)と同様に，$\angle PQC=\angle ABC$

ところが，$\angle PQC+\angle QPC=90^\circ$ だから，

$\angle ABC+\angle QPC=90^\circ$

PQとABの交点をEとすると，

$\angle PEB=180^\circ-\angle ABC-\angle QPC$

$=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

よって，$PQ\perp AB$である。

P102

5 (1) $\triangle ABE$と$\triangle BCD$で，AB=BC，AE=BD，$\angle EAB=\angle DBC$

よって，$\triangle ABE\equiv\triangle BCD$（2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい）

すると，$\angle AEB=\angle BDC$

だから，$\angle AEP+\angle ADP=180^\circ$

よって，四角形ADPEは円に内接する。

(2) $\angle AET=\angle TEC=a$，$\angle AFT=\angle TFC=b$とおく。

四角形AETFに着目すると，

$\angle EAF=\angle AET+\angle AFT+\angle ETF$だから，

$\angle BAD=\angle EAF=a+b+90^\circ$

また，四角形TECFに着目すると，

$\angle ETF=\angle TEC+\angle TFC+\angle C$だから，

$\angle C=90^\circ-(a+b)$

よって，$\angle BAD+\angle C$

$=a+b+90^\circ+90^\circ-(a+b)=180^\circ$

したがって，四角形ABCDは円に内接する。

(3) まず，$\angle AED+\angle AFD=180^\circ$ だから，四角形AEDFは円に内接する。

よって，$\angle BAD=\angle EFD$

ところが，$\angle BAD+\angle B=90^\circ$

よって，$\angle EFC+\angle B=\angle EFD+\angle DFC+\angle B=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

よって，4点B, E, F, Cは同じ円周上にある。

6 (1) $\triangle CAQ$と$\triangle CRB$で，CA=CR，CQ=CB，$\angle ACQ=\angle RCB(=60^\circ+\angle ACB)$

よって，$\triangle CAQ\equiv\triangle CRB$（2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい）

すると，$\angle CAS=\angle CRS$だから，4点C，R，A，Sは同一円周上にある。

よって，$\angle ASR=\angle ACR=60^\circ$

したがって，$\angle ASR=\angle P(=60^\circ)$だから，4点A，P，B，Sは同じ円周上にある。

(2) $\triangle ABC$の内心Iに関して，

$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$が成り立つ。

すると，四角形IBDCにおいて，内角$\angle BDC$の外側の角は$2\angle BIC$だから，

$180^\circ+\angle A$

よって，$\angle BDC=360^\circ-(180^\circ+\angle A)$

$=180^\circ-\angle A$

したがって，$\angle BDC+\angle A=180^\circ$

よって，4点A, B, D, Cは同一円周上にある。

(3) $\triangle PAB$において，PA=PBより，

$\angle PAB = \angle PBA$

よって，$\angle APB = 180^\circ - 2\angle PAB$

$\triangle RCD$においても同様に，

$\angle CRD = 180^\circ - 2\angle RCD$

ところが，接弦定理より，$\angle PAB = \angle ACB$，$\angle RCD = \angle CBD$

しかも，$\angle ACB + \angle CBD = 90^\circ$だから，

$\angle APB + \angle CRD$

$= (180^\circ - 2\angle PAB) + (180^\circ - 2\angle RCD)$

$= 360^\circ - 2(\angle PAB + \angle RCD)$

$= 360^\circ - 2(\angle ACB + \angle CBD)$

$= 360^\circ - 2 \times 90^\circ = 180^\circ$

よって，四角形PQRSは円に内接する。

P103

7 (1) 100°

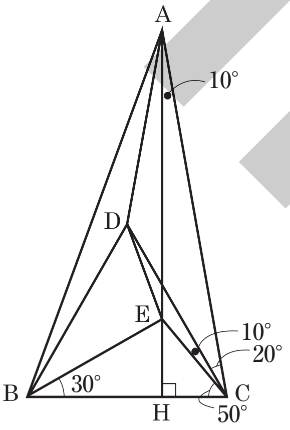
(2) $\angle BFC = 67^\circ$，$\angle AHF = 111^\circ$

(3) 図をかくと，右図のようになる。

$\triangle BCE$と$\triangle BDE$で，$BC = BD$，BEは共通，

$\angle EBC = \angle EBD$ $(= 30^\circ)$

よって，$\triangle BCE \equiv \triangle BDE$（2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい）



よって，$EC = ED$だから，

$\angle EDC = \angle ECD = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$

ところが，$\angle EAC = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$だから，

$\angle EAC = \angle EDC$

よって，4点A, D, E, Cは同一円周上にある。

すると，$\angle DAE = \angle DCE = 10^\circ$だから，

$\angle DAC = 10^\circ + 10^\circ = 20^\circ$

また，$\angle DCA = 20^\circ$だから，$\angle DAC = \angle DCA$　よって，$AD = DC$

$\angle BAC = 30^\circ$

解説

7 (1) 四角形ABCDは円に内接するので，$\angle ADB = \angle ACB = 40^\circ$，$\angle CDA = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$

(2) 四角形BFGEは，EFを直径とする円に内接するので，$\angle BFC = \angle DEC = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$，四角形AFGDは，DFを直径とする円に内接する。

$\angle ADH = 90^\circ - 23^\circ \times 2 = 44^\circ$，

$\angle DAH = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$，

$\triangle AHD$で，$\angle AHF = 44^\circ + 67^\circ = 111^\circ$

(3) 証明は解答参照。

$AD = DC$より，$AD = DB$で，

$\angle ADB = 360^\circ - (60^\circ + 140^\circ) = 160^\circ$

よって，$\angle BAD = \dfrac{1}{2} \times (180^\circ - 160^\circ) = 10^\circ$

すると，$\angle BAC = 10^\circ + 10^\circ + 10^\circ = 30^\circ$

8 (1) $\triangle ABE$と$\triangle ACF$で，$AB = AC$，$BE = CF$，$\angle ABE = \angle ACF$

よって，$\triangle ABE \equiv \triangle ACF$（2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい）すると，

$\angle AEB = \angle AFC$より，$\angle AED = \angle AFD$となる。

したがって，4点A，E，F，Dは同一円周上にある。

(2) $\angle AEO = \angle ADO = 90^\circ$より，4点O，E，A，DはAOを直径とする同一円周上にある。

また，$OM \perp BC$だから，3点O，A，MもAOを直径とする円周上にある。

以上から，5点O，E，A，D，Mは同一円周上にある。

そうすると，∠ADF＝∠AOE，∠AMD＝∠AOD

ところが，△AOE≡△AODだから，∠AOE＝∠AOD

よって，∠ADF＝∠AMD

△ADFと△AMDで，∠ADF＝∠AMD，∠DAF＝∠MAD（共通）

よって，△ADF∽△AMD（2組の角がそれぞれ等しい）