1 合同

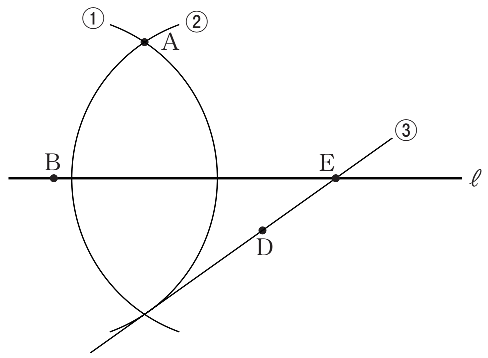
1 作図，合同な三角形の証明とその利用

解き方の指針

(1)　コンパスにより，等しい長さの辺を作図していることから，どの合同条件を答えるのか考える。
(2)　(1)の作図により，直線ℓについて反対側に点をとることで，等しい角度がつくられることを利用する。

◆解答◆

(1)　(例) 3組の辺が，それぞれ等しい
(2)



◆解説◆

(1)　**作図の説明，合同な三角形の利用**

作図をする問題ではなく，作図によってできる点や，辺の長さ，角の大きさが等しくなっていることを，三角形の合同を用いて説明する問題。

作図するだけ，合同を証明するだけ，といった問題ではなく，その根拠としてどの合同条件を使うのか，ということを問われている。

コンパスによって，点や辺の長さを移すことで，長さの等しい辺という情報が得られることを意識していれば，合同条件の選択で迷うことはないだろう。

(2)　**合同な三角形を利用した作図**

(1)で登場する，三角形の合同を利用した作図の問題。(1)では直線ℓ上の点Cが与えられているが，(2)は直線ℓ上の点Eを作図によって求める。

(1)で用いた，

　等しい角をつくるには，対称な点をとる

という手順が押さえられていれば，さして手が止まることはないだろう。

2 三角形の内角と外角，二等辺三角形

解き方の指針

(1)　三角形の内角と外角の関係を利用する。
(2)　△AEFについて，∠AEF＝∠AFEを示せば，二等辺三角形の性質からAE＝AFを証明できる。

◆解答◆

(1)　40度
(2)　(例)

∠ABE＝∠CBF(仮定)　……(i)
∠BAE＝∠BCF(仮定)　……(ii)
∠AEF＝∠ABE＋∠BAE　……(iii)
∠AFE＝∠CBF＋∠BCF　……(iv)
(i)，(ii)，(iii)，(iv)より，
∠AEF＝∠AFE　……(v)
(v)から，△AEFは二等辺三角形である。
したがって，AE＝AF

※論理的に正しい場合は正答とする。
※(i)，(iii)，(iv)，(v)が導かれている場合はそれぞれ点を与える。

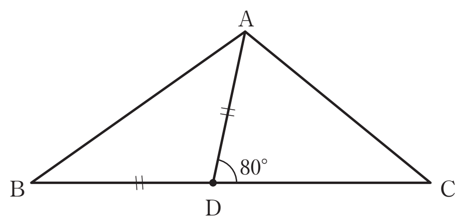
◆解説◆

(1)　**角の大きさを求める問題**

問題文に示された条件

∠ADC＝80°，DA＝DB

を問題の図にかき入れると，次のようになる。



DA＝DBより，△ABDは∠BDAを頂角とする二等辺三角形である。よって，二等辺三角形の2つの底角が等しいことから，

∠BAD＝∠ABD

が成り立つ。

また，△DABについて，内角と外角の関係から，

∠BAD＋∠ABD＝∠ADC＝80°

が成り立つ。

以上より，

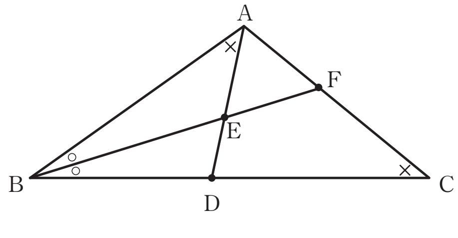
∠BAD＝80°÷2＝40°

(2)　**二等辺三角形であることを証明する問題**

問題文に示された条件

∠ABDの二等分線と線分AD，辺ACとの交点をそれぞれE，Fとする。

より，2点E，Fを問題の図にかき入れると，次のようになる。



上の図で，△ABEの内角と外角の関係から，

$\angle AEF = \angle ABE + \angle BAE = ○ + ×$

△BCFの内角と外角の関係から，

$\angle AFE = \angle CBF + \angle BCF = ○ + ×$

がそれぞれ成り立つ。よって，△AEFは，2つの角が等しく，∠EAFを頂角とする二等辺三角形であるから，AE＝AFとなる。

3 正三角形，合同な三角形の証明

解き方の指針

⑴「正三角形」という表現から，等しい辺や等しい角があることを読み取って進めていく。等しい辺や等しい角の関係を書く際には，示された三角形に対応しているかに注意する必要がある。

⑵ 具体的に与えられた角度はないが，正三角形であることから60°を利用する。また，⑴で証明したことが使えないか考える。

◆解答◆

⑴あ　AB＝BC　　い　2組の辺とその間の角

⑵　120度

◆解説◆

⑵ **回転移動した三角形の対応する辺が作る角の問題**

⑴の証明により，合同な三角形の対応する角は等しいから，

$\angle BAD = \angle CBE$

また，△ABCが正三角形であることから，

$$\begin{aligned}\angle ABF &= \angle ABD - \angle FBD \\ &= 60^\circ - \angle CBE \\ &= 60^\circ - \angle BAD \\ &= 60^\circ - \angle BAF\end{aligned}$$

よって，

$\angle ABF + \angle BAF = 60^\circ$　…①

ここで，△ABFの内角の和について，

$\angle ABF + \angle BAF + \angle AFB = 180^\circ$　…②

であるから，①を②に代入して，

$$\begin{aligned}60^\circ + \angle AFB &= 180^\circ \\ \angle AFB &= 180^\circ - 60^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

4 合同な三角形の証明とその利用

解き方の指針

⑴ 平行四辺形の向かい合う辺は等しいこと，平行四辺形の向かい合う辺は平行であり，錯角が等しいことを利用する。

⑵ △AEF≡△DCEから導ける等しい大きさの角と，△ABEが二等辺三角形であることから導ける等しい大きさの角を利用する。

◆解答◆

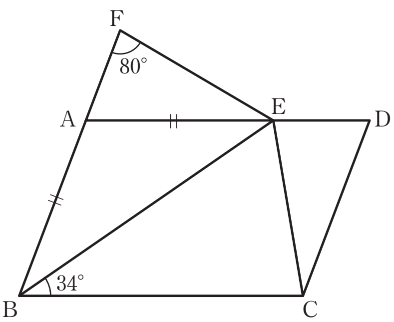
⑴ △AEFと△DCEにおいて
仮定から
AF＝DE　　…①
平行四辺形ABCDの対辺は等しいから
AB＝DC
仮定から　AE＝AB
ゆえに　AE＝DC　…②
また，BF∥DCより，錯角は等しいから
∠EAF＝∠CDE　…③
①，②，③より
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。
したがって　△AEF≡△DCE

⑵ 32°

◆解説◆

⑵ **合同な三角形，平行四辺形，二等辺三角形の性質の利用**

問題で与えられた条件のうち必要なものを加えると次の図のようになる。



AD∥BCより，平行線の錯角は等しいから，

$\angle AEB = \angle CBE = 34^\circ$

AB＝AEより，二等辺三角形の底角は等しいから，

$\angle ABE = \angle AEB = 34^\circ$

よって，
$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle ABE + \angle CBE \\ &= 34^\circ + 34^\circ \\ &= 68^\circ\end{aligned}$$

平行四辺形の向かい合う角は等しいから，

$\angle ADC = \angle ABC = 68^\circ$

△AEF≡△DCEより，合同な図形の対応する角は等しいから，

$\angle DEC = \angle AFE = 80^\circ$

△DCEにおいて，

$$\begin{aligned}\angle DCE &= 180^\circ - 68^\circ - 80^\circ \\ &= 32^\circ\end{aligned}$$

2 相似

1 三角形の合同の証明，線分の比と面積の比

解き方の指針

(1) 2つの三角形で，辺CGが共通であることに注目する。また，題意の角の二等分線，平行線の錯角などから，AB＝AC＝AEとなることがわかる。二等辺三角形の底角が等しいことから，∠ACE＝∠AEC，平行線の錯角が等しいことから，∠AEC＝∠FCGと，等しい大きさの角の関係がわかる。

(2)① (1)の証明から，CF＝CDとなることから，相似な三角形の関係を利用する。

② 与えられた図に対して，線分を延長したり，平行な線分をひいて，相似な三角形の関係を利用する。

③ (1)の証明から，△CFGの面積と△CDGの面積が等しいことを利用する。また，平行線の錯角などから，△HEA∽△HBFに注目すると，(2)①で線分CFの長さを求めていることから，線分BFの長さがわかり，EA：BF＝AH：FHである。これにより，△ADHと△FDHの面積の比がわかり，同じく，(2)①で利用したAD：DCから△ADFと△CDFの面積の比がわかることから解答していく。

◆解答◆

(1) （証明）（例）

△CDGと△CFGにおいて，
共通な辺だから，　CG＝CG　…㋐
線分BEは∠ABCの二等分線だから，
∠ABD＝∠CBD　…㋑
AE∥BFより，錯角は等しいから，
∠CBD＝∠AED　…㋒
㋑，㋒より，　∠ABD＝∠AED
よって，△ABEは二等辺三角形だから，
AB＝AE
このことと仮定より，AC＝AE
よって，△ACEは二等辺三角形だから，
∠DCG＝∠AEG　…㋓
AE∥BFより，錯角は等しいから，
∠AEG＝∠FCG　…㋔
㋓，㋔より，　∠DCG＝∠FCG　…㋕
△ABCが二等辺三角形であることと，㋑より，
∠DCB＝2∠CBD　…㋖
△BDFは二等辺三角形だから，
∠CBD＝∠CFG　…㋗
三角形の1つの外角は，そのとなりにない2つの内角の和に等しいから，
∠DCB＝∠CDG＋∠CFG　…㋘
㋖，㋗，㋘より，∠CDG＝∠CFG
よって，△CDFは二等辺三角形だから，
CD＝CF　…㋙
㋐，㋕，㋙より，
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△CDG≡△CFG

(2)① CF＝$\frac{8}{3}$cm

② CG：GE＝1：5

③ △ADH：△CFG＝24：11

◆解説◆

(2)① **相似な三角形を利用して線分の長さを求める問題**

△ADEと△CDBにおいて，
AE∥BCより，平行線の錯角は等しいから，
∠DAE＝∠DCB，∠DEA＝∠DBC
以上より，2組の角がそれぞれ等しいので，
△ADE∽△CDB…Ⓐ
相似な三角形の辺の比は等しいから，
AD：CD＝AE：CB
が成り立ち，(1)の証明から，AE＝AB＝8cm，題意より，CB＝4cmだから，
AD：CD＝8：4＝2：1
ここで，AC＝AB＝8cmだから，

$$CD=8\times\frac{1}{2+1}=\frac{8}{3}\text{(cm)}$$

(1)の証明から，CF＝CDだから，線分CFの長さは，

$$CF=CD=\frac{8}{3}\text{(cm)}$$

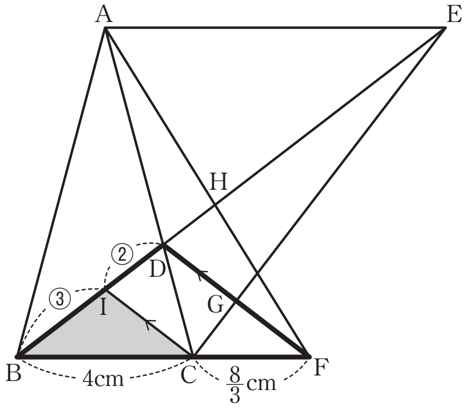
② **相似な三角形や平行線の線分の比を利用する問題**

いろいろな解法が考えられる。以下に，その一例と別解をいくつか紹介する。

点Cを通り，線分DFと平行な直線をひき，線分BEとの交点をIとする。
(2)①より，CF＝$\frac{8}{3}$cmだから，

$$BC:CF=4:\frac{8}{3}=3:2$$

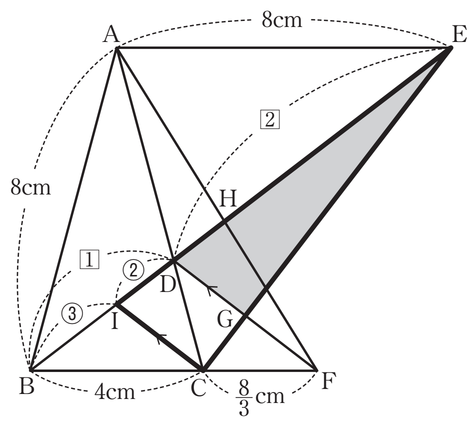
よって，
BI：ID＝BC：CF＝3：2



また，(2)①のⒶより，△ADE∽△CDBで，
ED：BD＝AE：CB＝8：4＝2：1
だから，

$$ID:DE=\left(1\times\frac{2}{3+2}\right):2=1:5$$

ここで，DG∥ICだから，
CG：GE＝ID：DE＝1：5



③　**線分の比を利用して面積を比較する問題**

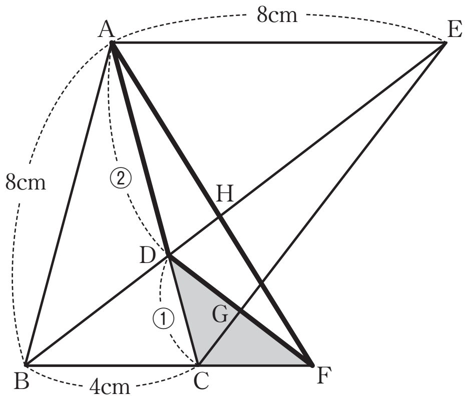
△ACFにおいて，△FAD，△FDCは，それぞれ線分AD，DCを底辺と考えると，高さの等しい三角形だから，その面積の比は底辺の比に等しく，

△FAD：△FDC＝AD：DC＝2：1

よって，

$△FAD=\frac{2}{2+1}△ACF=\frac{2}{3}△ACF$

$△FDC=\frac{1}{2+1}△ACF=\frac{1}{3}△ACF$



ここで，(1)より，DG＝FGであり，△CDG，△CFGは，それぞれ線分DG，FGを底辺と考えると，高さの等しい三角形だから，

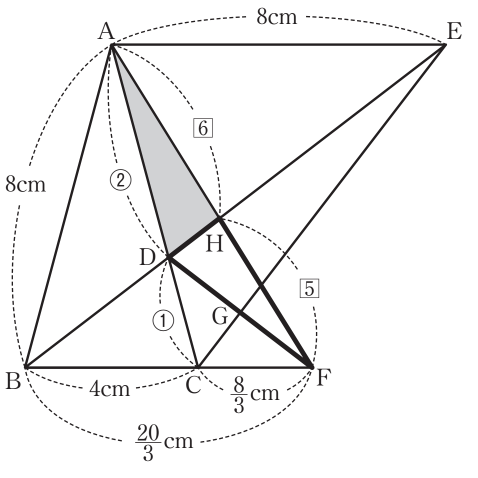
$△CFG=\frac{1}{1+1}△FDC=\frac{1}{2}△FDC=\frac{1}{6}△ACF$

また，AE∥BFだから，

AH：FH＝AE：FB

であり，$CF=\frac{8}{3}$cmより，$FB=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}$(cm)だから，

$AH:FH=8:\frac{20}{3}=6:5$



よって，△ADH，△FDHは，それぞれ線分AH，FHを底辺と考えると，高さの等しい三角形だから，

$△ADH=\frac{6}{6+5}△FAD=\frac{6}{11}△FAD=\frac{4}{11}△ACF$

これらのことから，

$△ADH:△CFG=\frac{4}{11}△ACF:\frac{1}{6}△ACF$
$=24:11$

2　平行四辺形，相似，面積の比

解き方の指針

(1)　平行四辺形の向かい合う角の大きさの関係を利用して，∠ADC＝60°となることから，∠CDQの大きさをaを用いて表す。最後は，△CDQの内角の和(180°)を利用して，aについての式をつくり求める。

(2)①　相似条件としては，辺の比が一切与えられていないので，「2組の角がそれぞれ等しい」を目標に進める。対頂角や平行線の錯角により等しい角がないか調べていく。

②　①で証明した，△AQR∽△CQPから得られる辺の比を用いて，高さの等しい三角形の面積の比は底辺の比に等しく，相似な三角形の面積の比は相似比の2乗に等しくなることの利用を考える。

◆解答◆

(1)　エ

(2)①(証明)(例)

△AQRと△CQPにおいて，

対頂角は等しいから，

∠AQR＝∠CQP　……㋐

仮定から，AS∥PC

平行線の錯角は等しいから，

∠ARQ＝∠CPQ　……㋑

㋐，㋑より，2組の角がそれぞれ等しいから，

△AQR∽△CQP

②あ　2　　い　1　　う　5

◆解説◆

(1)　**角度を与えられた文字で表す問題**

平行四辺形の向かい合う角の大きさは等しいので，

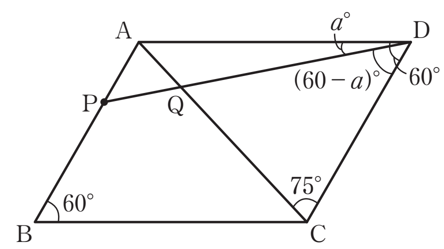
∠ADC＝∠ABC＝60°

問題より，

∠ADP＝a°

だから，

∠CDQ＝∠ADC－∠ADP
＝　60°　－　a°

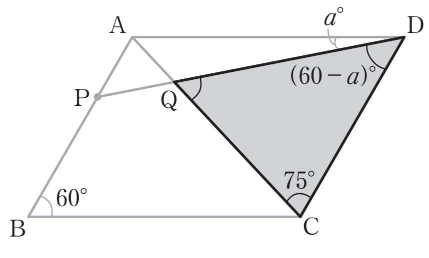


また，

∠DCA＝75°

だから，△CDQの内角の和より，

∠CDQ＋∠DCQ＋∠CQD＝180°
∠CDQ＋∠DCA＋∠CQD＝180°
60°－a°＋　75°　＋∠CQD＝180°
∠CQD＝180°－60°＋a°－75°
＝45°＋a°



(2)② 平行線と相似な三角形を利用して面積を比較する問題

問題より，

AS∥PC，AB∥DC

よって，

四角形APCSは，

向かい合う２組の辺が平行だから平行四辺形となる。

また，

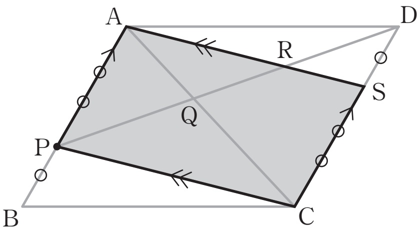
AB＝DC，AP＝SC

となるから，

PB＝AB－AP＝DC－SC＝DS

よって，

AP：PB＝CS：SD＝２：１



ここで，AB∥DCより，平行線の錯角が等しいことから，

∠QAP＝∠QCD

∠QPA＝∠QDC

となるので，

△QAP∽△QCD

このとき，相似比は

AP：CD＝AP：(CS＋SD)

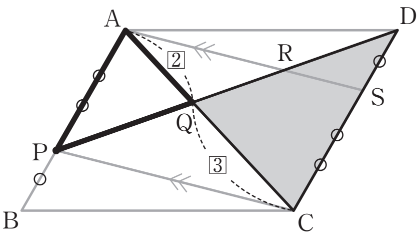
＝２：(2＋1)

＝２：３

だから，

AQ：CQ＝２：３　　　…(ⅰ)

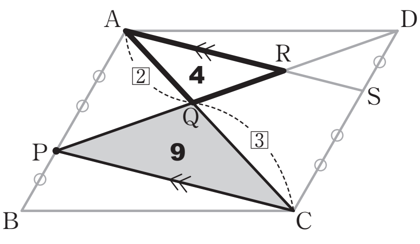
である。



また，(2)①の証明より△AQR∽△CQPで，相似比は(ⅰ)だから，その面積の比は，

△AQR：△CQP＝2^2：3^2

＝４：９　　…(ⅱ)

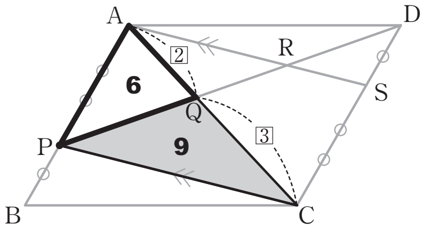


さらに，△AQPと△CQPは，それぞれ線分AQ，CQを底辺としたときに，高さが等しい三角形となるから，その面積の比は線分AQ，CQの比に等しく，

△AQP：△CQP＝AQ：CQ

＝２：３

＝６：９ ((ⅱ)に比を合わせた)



ここで，

△AQP＋△CQP＝△APC

＝$\frac{1}{2}$×平行四辺形APCS

すなわち，

平行四辺形APCS＝2(△AQP＋△CQP)

だから，

△AQR：平行四辺形APCS＝４：２×(6＋9)

＝４：30

＝２：15

よって，△AQRの面積は，四角形APCSの面積の$\frac{2}{15}$倍

3 線分の比と面積比の問題

解き方の指針

(1) 辺の長さの比に着目する。平行線にできる大きさの等しい角に着目する。

(2)① △AEDと△EDCの相似比に着目する。

② △ABEと△AECの面積比を利用する。

◆解答◆

(1) **△AEDと△EDCで，**

平行線の錯角だから，

∠AED＝∠EDC　　　…①

仮定から，AE＝16cm，ED＝12cmだから，

AE：ED＝４：３　　　…②

仮定から，ED＝12cm，DC＝９cmだから，

ED：DC＝４：３　　　…③

②，③から，AE：ED＝ED：DC　…④

①，④から，２組の辺の比が等しく，そのはさむ角がそれぞれ等しいので，△AED∽△EDC

(2)① $\frac{3}{2}$倍　　② $\frac{75}{32}$倍

◆解説◆

(2)① **相似な三角形の相似比を利用する問題**

△AED∽△EDCで，相似比は

AE：ED＝16：12＝４：３

であるから，EC＝$\frac{3}{4}$AD

AD＝2BEより，

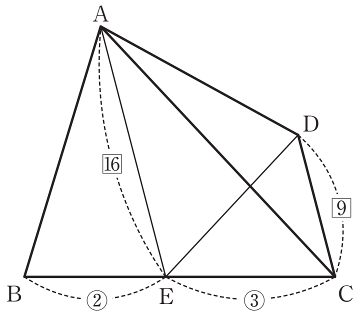
EC＝$\frac{3}{4}$×2BE

＝$\frac{3}{2}$BE

よって，ECはBEの$\frac{3}{2}$倍である。

(2)② **線分の比と面積比の問題**

下の図のように，AとCを結ぶ。



△ABEの面積をSとする。高さが等しい三角形の面積比は底辺の比に等しいことを利用する。

△ABEと△AECの底辺をそれぞれBE，ECとすると，高さは等しいから，△ABEと△AECの面積比はBEとECの長さの比に等しい。

BE：EC＝2：3より，

△ABE：△AEC＝2：3であるから，

$$\triangle AEC = \frac{3}{2}\triangle ABE = \frac{3}{2}S$$

同様にして，△AECと△ACDの面積比はAEとDCの長さの比に等しい。

AE：DC＝16：9より，

△AEC：△ACD＝16：9であるから，

$$\triangle ACD = \frac{9}{16}\triangle AEC = \frac{9}{16}\times\frac{3}{2}S = \frac{27}{32}S$$

台形AECD＝△AEC＋△ACD

$$= \frac{3}{2}S + \frac{27}{32}S = \frac{75}{32}S$$

よって，台形AECDの面積は△ABEの面積の$\frac{75}{32}$倍である。

4 二等辺三角形の性質とその利用

解き方の指針

(1) 与えられた条件に加えて，二等辺三角形の底角が等しいこと，三角形の内角の和が180°であることを用いて，∠BFD＝∠CEDを導く。

(2) Bを通り，DFに平行な直線をひき，二等辺三角形をつくってBD＋DCを三角形の1つの辺に置きかえて長さを求める。

◆解答◆

(1) **AB＝ACであるから**

∠ABC＝∠ACB…①

∠DBF＝∠ABCであることと①より，

∠DBF＝∠ACB…②

∠BFD

＝180°－(∠DBF＋∠BDE)…③

∠CED

＝180°－(∠ACB＋∠CDE)…④

∠BDE＝∠CDEであることと②，③，④より，

∠BFD＝∠CED…⑤

対頂角は等しいから

∠BEF＝∠CED…⑥

⑤，⑥より，∠BFD＝∠BEF…⑦

⑦より，△BFEは，2つの角が等しい三角形であるから，二等辺三角形である。

(2) **9(cm)**

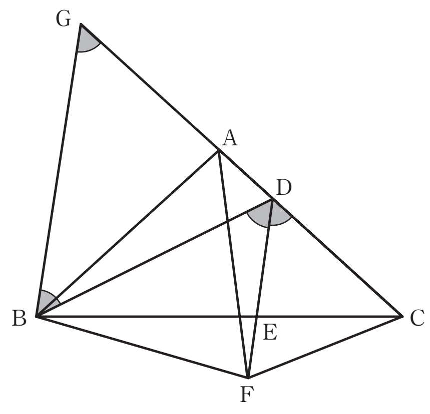
◆解説◆

(1) **二等辺三角形であることの証明問題**

△DBFと△DCE(相似)について，その内角の和から∠BFD＝∠CEDを導く。

(2) **三角形の面積の比から底辺を求める問題**

下の図のように，Bを通りDFに平行な直線をひき，この直線と辺ACの延長との交点をGとする。



仮定より，

∠BDE＝∠CDE …(i)

GB∥DFより，錯角が等しいので，

∠BDE＝∠DBG …(ii)

GB∥DFより，同位角が等しいので，

∠CDE＝∠DGB …(iii)

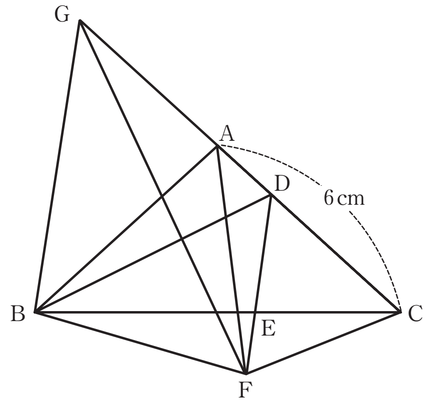
(i)～(iii)より，

∠DBG＝∠DGB

となるので，△DGBは二等辺三角形である。

よって，GD＝BDとなるので，

$BD+DC=GD+DC$
$=GC$
と言える。
次に下の図のように，GとFを結んで△GFCをつくる。



△GFCについて，
$\triangle GFC=\triangle GFD+\triangle DFC$ …(iv)
GB∥DFより，
$\triangle GFD=\triangle BFD$ …(v)
(iv)，(v)より，
$\triangle GFC=\triangle BFD+\triangle DFC$
$=$四角形DBFC
となる。よって，$\triangle GFC=15cm^2$である。
また，$\triangle AFC=10cm^2$で，△GFCと△AFCの底辺をそれぞれGC，ACとしたとき，高さは等しくなるので，GCとACの比は，△GFCと△AFCの面積の比に等しくなる。よって，

$GC:AC=15:10$
$=3:2$

$AC=6$cmより，

$GC:6=3:2$
$2GC=18$
$GC=9$(cm)

よって，$BD+DC=GC$
$=9$(cm)

5 正三角形やひし形の性質を利用する問題

解き方の指針

(1) 正三角形，ひし形の等しい辺の長さ，正三角形の内角と平行線の錯角を利用する。
(2) 平行線と線分の比の性質，底辺の比と面積の比の関係を利用する。

◆解答◆

(1) **△ABDと△ACFにおいて**
四角形ADEFはひし形であるから
AD＝AF …(i)
△ABCは正三角形であるから
AB＝AC …(ii)
また
∠BAD＝∠BCA＝60°
AF∥BCであるから
∠CAF＝∠BCA
よって
∠BAD＝∠CAF …(iii)
(i)，(ii)，(iii)より
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。
したがって，△ABD≡△ACF
(2) $\frac{40}{9}$**(倍)**

◆解説◆

(1)の証明問題では正三角形やひし形の性質，平行な直線と角の性質を用いる。どちらも基本的な内容である。
(2)では，四角形ACEFを△ACFと△CEFに分けて，三角形と線分の比の性質，底辺の比と面積の比の関係を利用して，三角形の面積を順に求めていく。

(1) **合同な三角形の証明問題**
正三角形ABCからAB＝ACを，ひし形ADEFからAD＝AFをそれぞれ導く。また，この2組の辺の間の角は，正三角形の内角と，平行な直線の錯角から等しいことを導く。

(2) **高さが等しい三角形の面積の問題**
$AD:DC=3:2$，$AD=FE$より，$FE:DC=3:2$，
$AC:FE=(3+2):3=5:3$である。
AC∥FEより，

$FG:GC=FE:DC$
$=3:2$

$\triangle FCE:\triangle EFG=FC:FG$
$=(3+2):3$
$=5:3$

よって，$\triangle FCE=\frac{5}{3}\triangle EFG$
次に，AC∥FEより，
$\triangle ACF:\triangle FCE=AC:FE=5:3$
よって，$\triangle ACF=\frac{5}{3}\triangle FCE$
また，四角形ACEFの面積は，

$\frac{5}{3}\triangle FCE+\triangle FCE=\frac{8}{3}\triangle FCE$
$=\frac{8}{3}\times\frac{5}{3}\triangle EFG$
$=\frac{40}{9}\triangle EFG$

3 円周角の定理

1 合同，相似，円

解き方の指針

(1) 問題に(仮定として)，AB＝AC，∠BAC＝∠CAD が与えられているので，残りの辺または角の条件を，円周角の定理を利用して見つけていく。

(2) (1)で証明した合同，相似な三角形の組，角の二等分線による辺の比，計算過程における2次方程式を利用して解答していく。

◆解答◆

(1) **△ABEと△ACDにおいて**

仮定から

AB＝AC …①

∠BAE＝∠CAD …②

$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角だから

∠ABE＝∠ACD …③

①，②，③より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△ABE≡△ACD

(2) $\frac{7}{2}$ **(cm)**

◆解説◆

(2) **合同，相似，角の二等分線の性質などを用いて，線分の長さを求める問題**

(1)の合同(△ABE≡△ACD)により，

AE＝AD＝3cm …①

また，仮定より，

AB＝AC＝4cm …②

だから，

EC＝AC－AE

＝4－3

＝1(cm) …③

ここで，△AEDと△BECにおいて，

∠AED＝∠BEC(対頂角) …④

∠EAD＝∠EBC($\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角) …⑤

だから，④，⑤より，2組の角がそれぞれ等しく，

△AED∽△BEC

よって，

AE：BE＝ED：EC …⑥

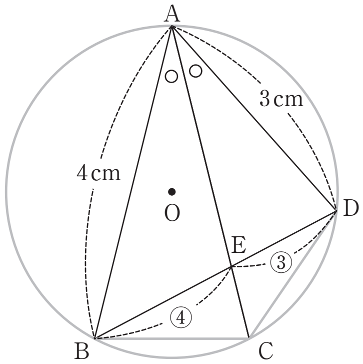
ところで，仮定より，∠BAC＝∠CADだから，線分AC(AE)は△ABDの∠BADの二等分線で，このとき，

AB：AD＝BE：ED …⑦

であり，①，②より，⑦は，

BE：ED＝4：3 …⑧

となる。



⑧から，

BE＝$4k$(cm)，ED＝$3k$(cm) （$k>0$） …⑨

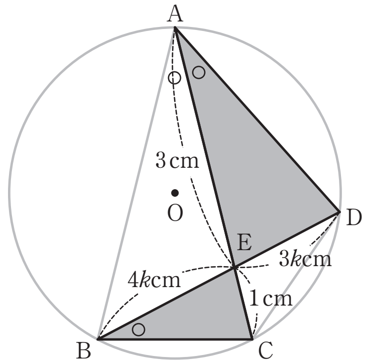
として，①，③，⑨を⑥に代入すると，

$3:4k=3k:1$

$12k^2=3$

$k^2=\frac{1}{4}$

$k>0$より，$k=\frac{1}{2}$



ここで，BD＝BE＋ED＝$4k+3k=7k$(cm)だから，

BD＝$7\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$(cm)

2 円周角の定理，三角形の合同，相似な三角形の面積

解き方の指針

(1) ∠AQPが△ACQの頂点Qにおける外角になっていることから考える。線分ABが直径で，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$という条件から，△ACBがどのような三角形であるかわかるので，∠CABの大きさは具体的に求められる。
(2) ∠APBが，直径に対する円周角であることを利用する。

◆解答◆

(1) エ
(2) (証明)(例)
△ABPと△ARPにおいて，
仮定から，
BP＝RP …㋐
半円の弧に対する円周角だから，
∠APB＝90° …㋑
㋑より，AP⊥BRだから，
∠APB＝∠APR …㋒
共通な辺だから，
AP＝AP …㋓
㋐，㋒，㋓より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，
△ABP≡△ARP

◆解説◆

(1) **角の大きさを文字を用いて表す問題**
下の図のように，線分ABは円Oの直径だから，

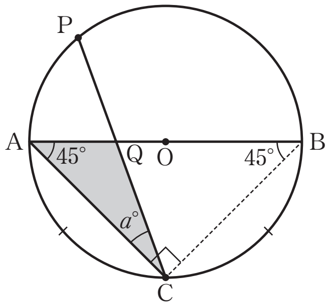
∠ACB＝90°

である。
また，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$だから，

∠CBA＝∠CAB＝45°

となる。
ここで，∠AQPは，△ACQの頂点Qにおける外角だから，内角と外角の関係より，

∠AQP＝∠CAQ＋∠ACQ
＝∠CAB＋∠ACP
＝45°＋a°



3 円と合同

解き方の指針

(1) AC＝ADだから，これとAC，ADの両端の角がそれぞれ等しいことを示せば，合同を証明できる。
(2) 同じ円では，弧の長さは中心角に比例することから，弧の長さは円周角に比例するといえる。

◆解答◆

(1) (略) 解説参照
※ 結論に達しているか否かにかかわらず，証明の過程に留意して採点すること。
(2) 36度

◆解説◆

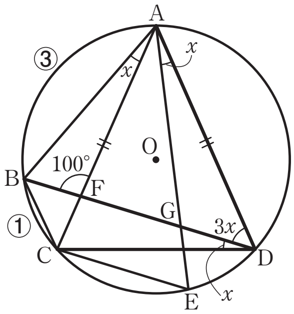
(1) **三角形の合同を証明する問題**
(解答例)
△ABCと△AGDにおいて
AC＝AD(仮定) ……(i)
∠ACB＝∠ADG($\overset{\frown}{AB}$の円周角) ……(ii)
∠BAC＝∠BDC($\overset{\frown}{BC}$の円周角) ……(iii)
BD∥CEより，
∠BDC＝∠DCE(平行線の錯角) ……(iv)
∠DCE＝∠GAD($\overset{\frown}{ED}$の円周角) ……(v)
(iii)，(iv)，(v)より，
∠BAC＝∠GAD ……(vi)
(i)，(ii)，(vi)より，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ABC≡△AGD

⑵　**角の大きさを求める問題**

円Oについて，円周角の大きさは弧の長さに比例するから，

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}=3:1$のとき，
$\angle ADB:\angle BDC=3:1$

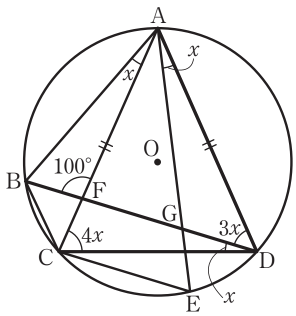
である。よって，$\angle BDC$の大きさをxとして表すと，$\angle ADB$は$3x$と表すことができるから，これを図にかき入れると，次のようになる。



また，問題の条件より，△ACDはAC＝ADの二等辺三角形だから，底角は等しく，$\angle ADC=\angle ACD$である。よって，

$$\begin{aligned}\angle ADC&=\angle ACD\\&=\angle ADB+\angle CDB\\&=3x+x\\&=4x\end{aligned}$$

となる。



ここで，△FCDに注目すると，△FCDの外角$\angle DFA$について，

$$\begin{aligned}\angle DFA&=\angle FCD+\angle FDC\\&=\angle ACD+\angle BDC\\&=4x+x\\&=5x\end{aligned}$$

となり，これが$(180°-100°=)80°$に等しいから，

$$5x=80°$$
$$x=80°\div 5=16°$$

より，

$$\angle ADB=3x=16°\times 3=48°$$

であるとわかる。

したがって，$\angle CAE$の大きさは，△FADの内角と外角の関係から，

$$\angle ADB+\angle FAD=\angle AFB$$
$$48°+\angle CAE+16°=100°$$
$$\angle CAE=100°-48°-16°=36°$$

と求めることができる。

4　円周角の定理を用いた合同な三角形の証明とその利用

解き方の指針

⑴　半径よりOA＝OD，等しい弧に対する中心角より$\angle AOF=\angle DOF$である。
⑵　$\angle CBD=\angle ABE$より，$\angle CBD$の大きさを$a°$を用いて表す。
⑶　△ABEの面積をもとに，△CAF，△AFO，△ABDの順に面積の比を求める。

◆解答◆

⑴　**△OAFと△ODFにおいて，**
円Oの半径だから
OA＝OD　…①
OFは共通　…②
1つの円で，等しい弧に対する中心角は等しいから
$\angle AOC=\angle DOC$
すなわち，$\angle AOF=\angle DOF$　…③
①，②，③より
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△OAF≡△ODF

⑵　**$90°-a°$**　⑶　**$\frac{34}{25}$(倍)**

◆解説◆

⑵　**等しい弧に対する円周角を利用する問題**

⑴より△OAF≡△ODFなので，

$$\angle OFA=\angle OFD=90°$$

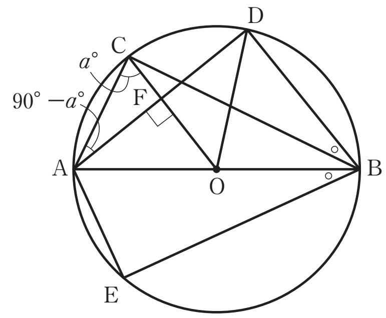
である。

よって△CAFにおいて，$\angle ACF=a°$，$\angle CFA=90°$であるから，

$$\begin{aligned}\angle CAF&=180°-a°-90°\\&=90°-a°\end{aligned}$$

である。

下の図のようにBとCを結ぶと，
$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AE}$より，等しい弧に対する円周角は等しいので，$\angle CBD=\angle ABE$である。



また，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいので，
$$\angle CBD=\angle CAF$$
よって，$\angle ABE=\angle CAF=90°-a°$

⑶　**相似比と面積の比，底辺の比と面積の比の関係を利用する問題**

△ABEの面積をもとに考える。
△AOE：△ABE＝OA：AB＝1：2で，
△AOC≡△AOEより，

$$\triangle AOC=\triangle AOE=\frac{1}{2}\triangle ABE\quad\cdots ⓐ$$

次に，△CAF∽△ABEより，
相似比はAC：BA＝4：10＝2：5なので，
面積比は$2^2:5^2=4:25$，よって，

$$\triangle CAF=\frac{4}{25}\triangle ABE \qquad \cdots ⓑ$$

となる。ⓐ，ⓑより，

$$\begin{aligned}\triangle AFO&=\triangle ACO-\triangle CAF\\&=\frac{1}{2}\triangle ABE-\frac{4}{25}\triangle ABE\\&=\frac{17}{50}\triangle ABE\end{aligned}$$

ここで，△AOF∽△ABDより，相似比は1：2なので，面積比は$1^2:2^2=1:4$，よって，

$$\begin{aligned}\triangle ABD&=4\triangle AFO\\&=4\times\frac{17}{50}\triangle ABE\\&=\frac{34}{25}\triangle ABE\end{aligned}$$

よって，△ABDの面積は△ABEの面積の$\frac{34}{25}$倍である。

5 円と合同，相似（補助線の利用）

解き方の指針

(1) 円周角と中心角の関係を利用して，２組の角がそれぞれ等しいことから相似を証明する。

(2) 問題の条件から，AF＝DE，∠AFG＝∠DEC＝90°がわかるので，FG＝ECが示せれば「２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」ことから，AG＝DCが示せれば「直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しい」ことから，∠GAF＝∠CDEが示せれば「１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」ことから，合同を導くことができる。

◆解答◆

(1) (例)

△ABCと△OBEにおいて，∠Bは共通

仮定より，∠DAB＝∠CADだから，

∠CAB＝2∠DAB

円周角の定理より，

∠DOB＝2∠DAB

∠DOB＝∠EOBだから，

∠CAB＝∠EOB

２組の角がそれぞれ等しいから，

△ABC∽△OBE

(2) (例)

点Oと点Gを結ぶ。

△OBEと△OGFにおいて，

仮定より，OE＝OF

円Oの半径だから，OB＝OG

ABは直径だから，∠ACB＝90°であり，

(1)より，△ABC∽△OBEだから，

∠ACB＝∠OEB＝90°　　……(i)

仮定より，∠OFG＝90°だから，

∠OEB＝∠OFG＝90°

直角三角形において，斜辺と他の１辺がそれぞれ等しいから，

△OBE≡△OGF

よって，BE＝GF　　……(ii)

また，(1)より，△ABC∽△OBEだから，

BA：BO＝BC：BE

BA＝2BOだから，BC＝2BE

よって，BE＝CE

(ii)より，GF＝CE　　……(iii)

△AGFと△DCEにおいて，

仮定より，∠AFG＝90°

対頂角は等しいから，∠OEB＝∠DEC

(i)より，∠DEC＝90°

よって，∠AFG＝∠DEC　　……(iv)

また，AF＝OA－OF，DE＝OD－OE，OA＝OD，OF＝OEだから，AF＝DE　　……(v)

(iii)，(iv)，(v)より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△AGF≡△DCE

◆解説◆

２問とも証明の問題であるが，(2)は様々な証明のしかたがあり，記述量もかなり多い。与えられた図形からだけではわからないときは，補助線なども利用して，いったん他の三角形の合同や相似に注目することも必要になる。その場合，証明中の条件の数が非常に多くなるが，ひとつひとつ整理して確認しよう。

(1) 三角形の相似を証明する問題

△ABCと△OBEは，∠Bが共通であるから，もう１組の等しい角を示せれば，「２組の角がそれぞれ等しい」ことから相似を証明できる。

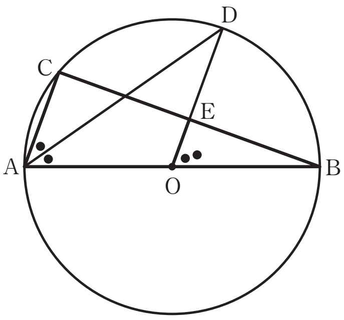
ここで，問題の条件より，線分ADは∠CABの二等分線であるから，

$$\angle CAD=\angle BAD$$
$$\angle CAB=\angle CAD+\angle BAD$$
$$=2\angle BAD$$

であり，∠EOBと∠BADは同じ弧$\overset{\frown}{BD}$に対する中心角と円周角であるから，

$$\angle EOB=2\angle BAD$$

である。よって，∠CAB＝∠EOBとなり，これと∠Bが共通であることから，相似であるといえる。

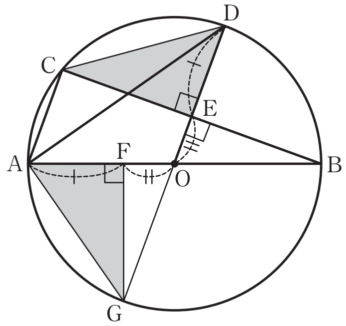


(2) 三角形の合同を証明する問題

問題文には，

> 線分OA上に，OE＝OFとなる点Fをとる。
> 点Ｆを通り，線分OAに垂直な直線をひき，円Ｏとの交点のうち，直線ABについて点Ｃと反対側にある点をＧとする。

とあるので，この条件にしたがって２点Ｆ，Ｇを問題の図にかき入れると，次のようになる。



上の図で，今わかっていることをひとまず整理する。

まず，仮定よりOE＝OFであり，円Ｏの半径が等しいことからOD＝OAである。よって，△AGFと△DCEにおいて，

$$AF=OA-OF,\ DE=OD-OE \quad \text{より，}$$
$$AF=DE$$

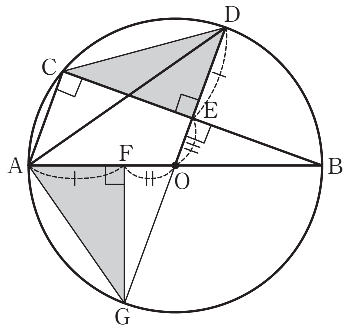
である。

次に，仮定より∠AFG＝90°である。また，∠ACBは半円の弧に対する円周角だから90°で，△ABC∽△OBEより対応する角は等しいから∠OEBも90°，対頂角は等しいから，∠DECも90°である。よって，

$$\angle AFG=\angle DEC=90^\circ$$

である。

したがって，問題の条件と(1)で証明した相似からわかることをまとめると，次の図のようになる。



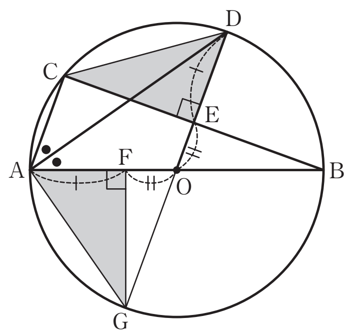
この図において，△AGF≡△DCEを証明するためには，次のうちのどれかが示せればよい。

Ⅰ：FG＝EC
Ⅱ：AG＝DC
Ⅲ：∠GAF＝∠CDE

そこで，この3つの条件について，どのように示すことができるかを考えていく。

《Ⅰ：FG＝EC》

上の図で，２点Ｏ，Ｇを結ぶと，△FOGができる。



ここで，△FOGと△EOBについて，

FO＝EO(仮定)　……(ⅰ)
OG＝OB(円の半径)　……(ⅱ)
∠GFO＝90°(仮定)
∠BEO＝∠BCA＝90°(△ABC∽△OBE)
∠GFO＝∠BEO＝90°　……(ⅲ)

が成り立つ。

よって，(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より，直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しいから△FOG≡△EOBであり，対応する辺の長さは等しいから，FG＝EBである。

また，△ABC∽△OBEで，

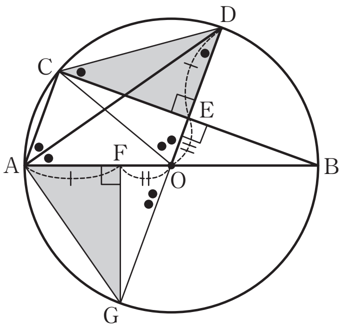
AB：OB＝BC：BE＝CA：EO＝２：１
BC：BE＝②：①
(BE＋EC)：BE＝②：①
EC＝BC－BE＝②－①＝①

より，EB＝ECである。

したがって，FG＝ECが示せるので，「２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」ことから，△AGF≡△DCEを証明できる。

《Ⅱ：AG＝DC》

2点O，Gと2点O，Cをそれぞれ結ぶと，△AOGと△CODができる。



ここで，△AOGと△CODについて，

AO＝CO＝DO＝GO(円の半径)　……(ⅰ)
△FOG≡△EOBより∠FOG＝∠EOBだから，
3点D，O，Gは一直線上にあるので，
∠AOG＝2∠ADO(中心角と円周角)
∠COD＝2∠CAD(中心角と円周角)
∠ADO＝∠DAO(二等辺三角形の底角)
∠DAO＝∠CAD(仮定)
∠AOG＝∠COD　……(ⅱ)

が成り立つ。よって，(ⅰ)，(ⅱ)より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△AOG≡△CODであり，対応する辺の長さは等しいから，AG＝DCである。

したがって，「直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい」ことから，△AGF≡△DCEを証明できる。

《Ⅲ：∠GAF＝∠CDE》

Ⅱと同様に考えると，△AOG≡△CODより，

∠GAO＝∠DCO
∠DCO＝∠CDO(二等辺三角形の底角)
∠GAO＝∠GAF，∠CDO＝∠CDEだから
∠GAF＝∠CDE

が成り立つ。したがって，「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」ことから，△AGF≡△DCEを証明できる。

補足

FG＝ECを示すときは，△FOG≡△EOBからFG＝EBを示した後，AC∥OE(同位角が等しい)とOがABの中点であることから中点連結定理を用いてもよい。

また，∠GAF＝∠CDEを示すときは，3点D，O，Gが一直線上にあることからDGは円の直径とわかるので，半円の弧に対する円周角∠DAGが90°であることを利用して，

∠GAF＝∠DAG－∠DAO＝90°－•
∠CDE＝180°－∠DEC－∠ECD
　＝180°－90°－•
　＝90°－•

となることを用いてもよい。

4 相似，三平方の定理

1 2つの正三角形と合同の証明，三平方の定理

解き方の指針

(1) △BDCと△ACEがともに正三角形であることから，△ADCと△EBCにおいて，長さの等しい辺がないかを調べていく。
また，∠ACD＝∠ACB＋∠BCD＝∠ACB＋60°，∠ECB＝∠ECA＋∠ACB＝60°＋∠ACBに注目する。

(2)① 問題に合わせて，自分で図をかき直し，△ABCがAB＝ACの二等辺三角形であることから考える。

② EFを直接求めることは困難なので，EBからFBをひいて求める。EBは(1)より，EB＝ADである。

◆解答◆

(1) (証明)
△ADCと△EBCで，
仮定から，　DC＝BC　…㋐
仮定から，　AC＝EC　…㋑
仮定から，　∠BCD＝∠ECA＝60°　…㋒
また，　∠ACD＝∠ACB＋∠BCD　…㋓
∠ECB＝∠ECA＋∠ACB　…㋔
∠ACBは共通な角だから，
㋒，㋓，㋔から，∠ACD＝∠ECB　…㋕
㋐，㋑，㋕から，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，　△ADC≡△EBC

(2)① **$3\sqrt{3}$ cm**
② **$(\sqrt{3}+\sqrt{7})$cm**

◆解説◆

(1) **角の一部を共有する2つの三角形の合同の証明問題**
△ADCと△EBCは，解答で示したように合同だから，点Cを中心とした回転移動で互いに重なりあう関係になっている。このとき，2つの三角形の対応する辺どうし(または対応する辺を延長した直線どうし)は，回転移動で回転させる角の大きさと同じ角度で交わる。本問で，辺CA，CDはともに点Cを中心として，時計回りに60°回転移動させると，それぞれ辺CE，CBに重なるから，回転させる角の大きさは60°で，辺AD，EBの交わる角度(∠AFE，∠BFD)も60°となる。

(2)① **頂点と対辺上の点を結んだ線分の長さを求める問題**
与えられた図は，指定されている長さでかかれた図ではないため，自分で正しく(指定されている長さの)図をかいて考えなければならない。
辺の長さの関係から図形の形・特徴をつかめれば考えやすくなる。
次の左図で，△ABDと△ACDにおいて，

題意より，AB＝AC(＝4cm)
△BDCは正三角形だから，DB＝DC
共通な辺だから，AD＝AD

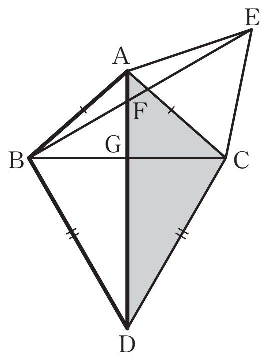
以上より，3組の辺がそれぞれ等しいから，

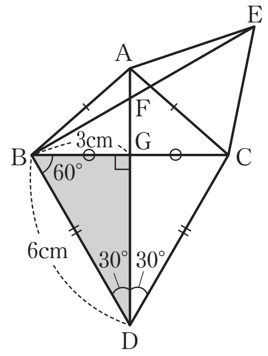
△ABD≡△ACD

合同な三角形の対応する辺や角は等しいから，

∠BDG＝∠CDG

よって，線分DGは，正三角形BDCの頂角Dを二等分するから，頂角Dに対する底辺BCを垂直に二等分する。





このとき△BDGは，3辺の長さの比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形となるから(上の右図)，

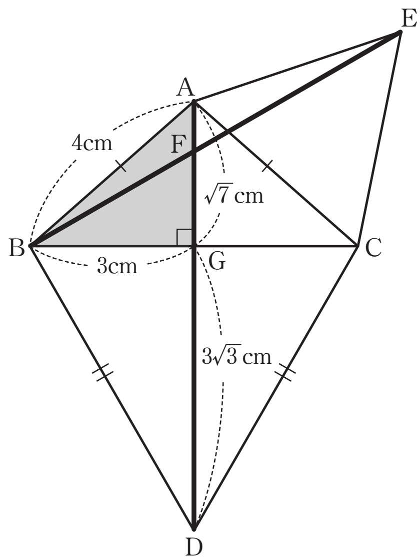
$DG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$ (cm)

② **三平方の定理と証明した合同を利用する問題**
(1)より，△ADC≡△EBCだから，AD＝EBである。
また，(2)①より，$BG=\dfrac{1}{2}BC=3$cmである。
下の図で，△ABGに三平方の定理を用いると，

$AG^2=AB^2-BG^2=4^2-3^2=7$
$AG>0$より，$AG=\sqrt{7}$ cm

よって，

$EB=AD=DG+AG=3\sqrt{3}+\sqrt{7}$ (cm)



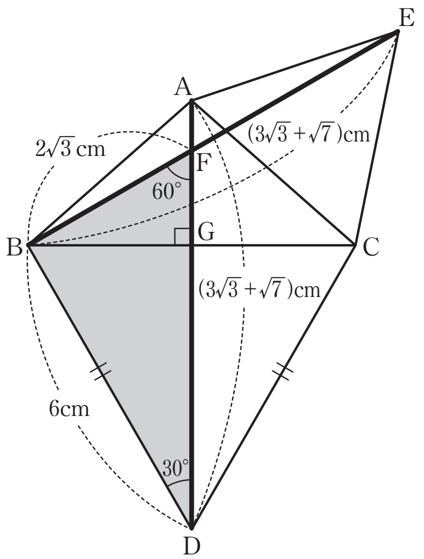
ここで，$\angle BFD=60°$となることから，$\triangle BDF$も，3辺の長さの比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形である。

これより，

$$FB=\frac{1}{\sqrt{3}}BD=2\sqrt{3}\ (cm)$$

となるから，求める線分EFの長さは，下の図より，

$$\begin{aligned}EF&=EB-FB\\&=AD-FB\\&=3\sqrt{3}+\sqrt{7}-2\sqrt{3}\\&=\sqrt{3}+\sqrt{7}\ (cm)\end{aligned}$$



2 **三平方の定理，合同，面積から高さを求める**

解き方の指針

(1)　$\triangle ABH$は，3辺の長さの比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形となることを利用する。

(2)　(1)で求めた線分AHが，平行四辺形ABCDの辺BCを底辺としたときの高さとなるから，これを利用して，平行四辺形の面積＝底辺×高さ で求める。

(3)①　求める線分QDを辺に持つ$\triangle DQM$に注目する。
点Mが辺ADの中点であること，対頂角，平行線の錯角などから，三角形の合同を利用して，線分QDが長さのわかる線分と等しくならないか調べる。

②　題意のDC＝DPから，$\triangle CDP$が二等辺三角形になることに注目する。また，①で考えた辺の関係を利用し，$\triangle CPQ$の内角の和について考える。

③　②より，$\angle CPM=90°$だから，線分PCは，$\triangle BCQ$において，線分BQを底辺としたときの高さとなることに注目する。$\triangle BCQ$の面積は，直接求めるか，(2)で求めた平行四辺形ABCDの面積を利用する。

◆解答◆

(1)　$3\sqrt{3}$ **cm**

(2)　$24\sqrt{3}$ **cm**^{2}

(3)①　**6cm**

②　**（説明）（例）**

$\angle CPD=x$，$\angle DPM=y$とすると，

$\triangle CDP$はDC＝DPの二等辺三角形なので，

$\angle CPD=\angle PCD=x$　　…㋐

$\triangle DPQ$はDP＝DQの二等辺三角形なので，

$\angle DPM=\angle DQM=y$　　…㋑

$\triangle CPQ$において，内角の和は180°なので

㋐，㋑より，$x+x+y+y=180°$

$x+y=90°$

$\angle CPM=\angle CPD+\angle DPM$なので，

$\angle CPM=90°$

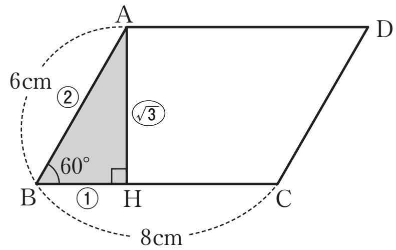
③　$\dfrac{12\sqrt{57}}{19}$**cm**

◆解説◆

(1)　**特別な直角三角形の辺の比から線分の長さを求める問題**

$\angle ABH=60°$，$\angle AHB=90°$より，下の図のように，$\triangle ABH$は，3辺の長さの比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形となるから，

$$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}\ (cm)$$



(2)　**平行四辺形の面積を求める問題**

平行四辺形ABCDにおいて，辺BCを底辺とすると，線分AHが高さとなる。

(1)より，$AH=3\sqrt{3}$ cmだから，

$$平行四辺形ABCD=8\times 3\sqrt{3}=24\sqrt{3}\ (cm^2)$$

(3)① **三角形の合同を利用して線分の長さを求める問題**

下の図の，△DQMと△ABMにおいて，

仮定より，点Mは辺ADの中点だから，

DM＝AM

対頂角は等しいから，

∠DMQ＝∠AMB

AB∥QCより，平行線の錯角は等しいから，

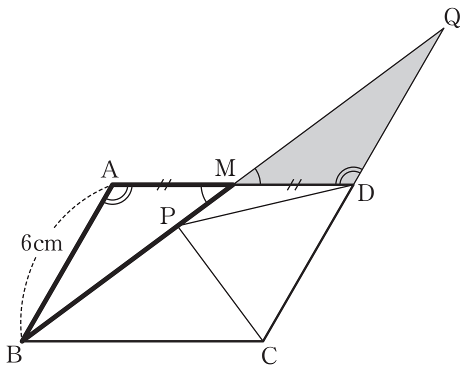
∠QDM＝∠BAM

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

△DQM≡△ABM

合同な三角形の対応する辺の長さは等しいから，

DQ＝AB＝6cm



③ **三角形の面積や相似から線分の長さを求める問題**

線分PCは，△BCQにおいて，線分BQを底辺としたときの高さにあたる。

ここで，△BCQの面積は，△DQM≡△ABMにより，△BCQ＝平行四辺形ABCDとなる。

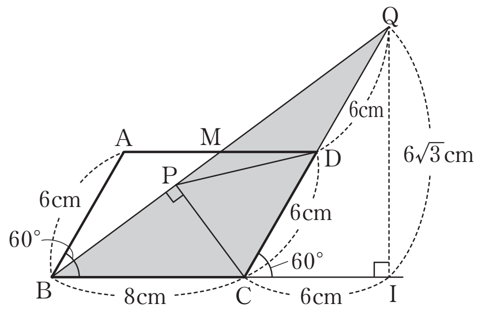
また，点Qから辺BCをCの方へ延長した直線に垂線をひき，その交点をIとすると，∠QCI＝∠ABC＝60°で，△QCIは，3辺の長さの比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形となるから，

QC＝2QD＝12cm

CI＝$\frac{1}{2}$QC＝6cm

QI＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$QC＝$6\sqrt{3}$cm

である。



よって，△BIQに三平方の定理を用いて，

$BQ^2=BI^2+QI^2=(8+6)^2+(6\sqrt{3})^2=304$

BQ＞0より，BQ＝$4\sqrt{19}$cm

以上のことから，

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{19}\times PC=24\sqrt{3}$

PC＝$\frac{12\sqrt{57}}{19}$(cm)

3 相似，合同，特別な直角三角形と面積

解き方の指針

(1)① 線分AFと線分FEをふくむ三角形の相似，すなわち，△DAF∽△BEFを利用する。

② △BEF，△DAFが二等辺三角形になることを利用する。なお，線分BDは正方形ABCDの対角線だから，BD＝$\sqrt{2}$ADである。

(2)① 仮定から，AB＝HD，∠ABE＝∠HDG＝90°がわかる。直角と斜辺以外の1辺の長さが等しいことがわかったから，BE＝DG，または，∠EAB＝∠GHD(三角形の合同条件を利用する場合)，AE＝HG(直角三角形の合同条件を利用する場合)のうち，等しいことが示せるのがどれかを考える。

② 四角形IECGの面積は，正方形ABCDの面積から，図形ABEIGDの面積をひけば求められる。①の証明から，△ABE≡△HDGで，図形ABEIGDの面積は△AIHと等しいことがわかる。△AIHがどのような三角形であるかに注目し，その面積を求めて，正方形ABCDの面積からひいて求める。

◆解答◆

(1)① **AF：FE＝5：3**

② **BF＝$6\sqrt{2}-6$(cm)**

(2)① **(証明)(例)**

△ABEと△HDGで，AB＝AD＝DHより，

AB＝HD …①

∠ABE＝∠HDG＝90° …②

△BCDがBC＝DCの直角二等辺三角形で，

BD∥EGより，同位角が等しいから，

∠CEG＝∠CGE＝45°

△CEGは直角二等辺三角形だから，EC＝GC

また，BE＝BC－EC，DG＝DC－GCから，

BE＝DG …③

①，②，③から，2組の辺とその間の角が，

それぞれ等しいので，

△ABE≡△HDG

② **$36-18\sqrt{3}$(cm²)**

◆解説◆

(1)① **相似な三角形を用いて線分の比を求める問題**

△DAFと△BEFにおいて，AD∥BCより，平行線の錯角は等しく，∠FDA＝∠FBE，∠FAD＝∠FEBだから，2組の角がそれぞれ等しく，△DAF∽△BEFである。

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから，

AF：EF＝AD：EB

AD＝BC＝BE＋ECより，AD：BE＝(3＋2)：3＝5：3

よって，AF：EF＝5：3

② **特別な三角形を利用して線分の長さを求める問題**

仮定より，∠BFE＝∠BEFだから，△BEFはBE＝BFの二等辺三角形。

また，①より，△DAF∽△BEFだから，△DAFも二等辺三角形で，FD＝AD＝6cmである。

ここで，四角形ABCDは正方形だから，対角線BDの長さは，BD＝$\sqrt{2}$AD＝$6\sqrt{2}$cm

よって，BF＝BD－FD＝$6\sqrt{2}-6$(cm)

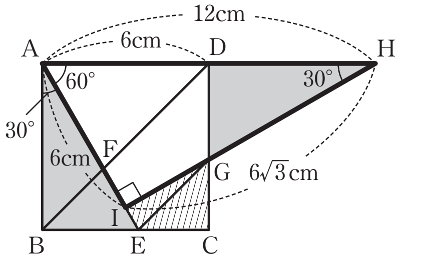
(2)② **特別な直角三角形を利用して面積を求める問題**

仮定より，$\angle \mathrm{BAE}=30^\circ$

よって，$\angle \mathrm{HAE}=\angle \mathrm{BAH}-\angle \mathrm{BAE}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

また，①の証明より，合同な三角形の対応する角の大きさは等しいから，$\angle \mathrm{DHG}=\angle \mathrm{BAE}=30^\circ$

これより，$\angle \mathrm{AIH}=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$であり，$\mathrm{AD}=\mathrm{DH}$で，$\mathrm{AD}=6\,\mathrm{cm}$だから，$\mathrm{AH}=2\mathrm{AD}=12\,\mathrm{cm}$，$\mathrm{AI}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}=6\,\mathrm{cm}$，$\mathrm{HI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AH}=6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$（下図）



四角形IECGの面積は，正方形ABCDの面積から図形ABEIGDの面積をひいて求められる。

ここで，①の証明より，△ABE＝△HDGとなるから，図形ABEIGDの面積は△AIHに等しく，

(四角形IECGの面積)

＝(正方形ABCDの面積)－(図形ABEIGDの面積)

＝(正方形ABCDの面積)－△AIH

$=6^2-\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3}$

$=36-18\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

4 特別な三角形，多角形，中点になることの証明

解き方の指針

(1)　△ABE≡△ADF(直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい)だから，辺の長さや角度の関係から，△CFEが直角二等辺三角形とわかり，$\mathrm{EF}=\sqrt{2}$から，CEの長さが求められることを利用する。

また, 正三角形の1辺(線分AEなど)の長さが与えられ，△ABEが直角三角形であることから，△ABEに三平方の定理を利用してもよい。

(2)①　中点連結定理や平行線と線分の比の関係を利用できないか考える。

②　正六角形は対角線により，辺の長さが正六角形の1辺の長さと同じ，合同な6つの正三角形に分けられることを利用する。

③　△BDFが正六角形ABCDEFの面積の半分になること，線分BDと線分STの交点をQ，線分DFと線分TUの交点をRとしたとき，△PQRが正三角形になること等から, 分割や不要な部分をひいて面積を求める。

◆解答◆

(1)　**BE＝$x-1$**　（$\sqrt{2-x^2}$ **も可**）

(2)①　**（証明）（例）**

点S，Uはそれぞれ辺AB，EFの中点であるから，

AS：SB＝FU：UE

よって，AF∥SU∥BE

△ABFにおいて，

AF∥SP，AS：SB＝1：1より，

FP：PB＝AS：SB＝1：1

したがって，点Pは線分BFの中点である。

②　$\frac{4\sqrt{15}}{3}$

③　$\frac{25\sqrt{3}}{2}$

◆解説◆

(1)　**特別な三角形を利用して辺の長さを文字で表す問題**

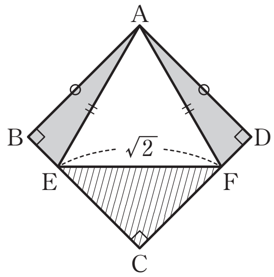
△ABEと△ADFにおいて，四角形ABCDは正方形だから，AB＝AD，$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{ADF}=90^\circ$，また，△AEFは正三角形より，AE＝AFだから，直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しく，△ABE≡△ADF(下左図)

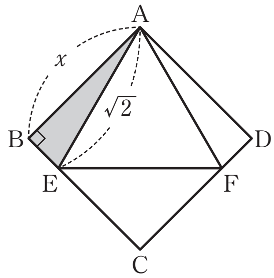
合同な三角形の対応する辺の長さは等しく，BE＝DF

よって，EC＝BC－BE＝DC－DF＝FCとなるから，$\angle \mathrm{ECF}=90^\circ$より，△CFEは直角二等辺三角形である。

ここで，$\mathrm{EF}=\sqrt{2}$だから，$\mathrm{CE}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{EF}=1$

これより，$\mathrm{BE}=\mathrm{BC}-\mathrm{EC}=x-1$





別解1

上右図のように，直角三角形△ABEに三平方の定理を用いて，$\mathrm{BE}^2=\mathrm{AE}^2-\mathrm{AB}^2=(\sqrt{2})^2-x^2=2-x^2$，$\mathrm{BE}>0$だから，$\mathrm{BE}=\sqrt{2-x^2}$

別解2

辺ABを対称の軸として，△ABEと対称な△ABGをかく。このとき，AG＝AE＝$\sqrt{2}$，EG＝2BE，∠EAG＝30°である。

点Eから辺AGに垂線をひき，辺AGとの交点をHとすると，EH＝$\frac{1}{2}$AE＝$\frac{\sqrt{2}}{2}$である(右図)。

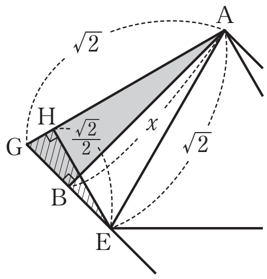
ここで，△ABG∽△EHG(∠AGB＝∠EGH，∠ABG＝∠EHGで，2組の角がそれぞれ等しい)だから，

$AG : EG = AB : EH$

$\sqrt{2} : 2BE = x : \frac{\sqrt{2}}{2}$

$BE \times 2x = 1$

$BE = \frac{1}{2x}$



⑵① **平行線と線分の比を利用して中点を示す証明問題**

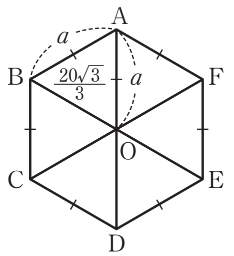
△ABP，△AFPに注目した場合，∠BAP＝∠FAP(＝120°÷2＝60°)を示すことになる。

これには，SU∥AFを示した後で，∠BSP＝∠BAF＝120°で，∠SBP＝30°，∠SPB＝180°－120°－30°＝30°より，∠ASP＝60°，SP＝SB＝AS，よって，△ASPは正三角形～などとなるが，SU∥AFを示したのであれば，やはり**◆解答◆**のように進めた方がスマートであろう。

② **面積が与えられた正六角形の1辺を求める問題**

正六角形ABCDEFの1辺の長さをaとし，対角線AD，BE，CFの交点をOとする。

△OAB，△OBC，△OCD，△ODE，△OEF，△OFAは合同な正三角形になるから，それぞれの面積は等しく，△OAB＝$40\sqrt{3} \div 6 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$である(下図)。

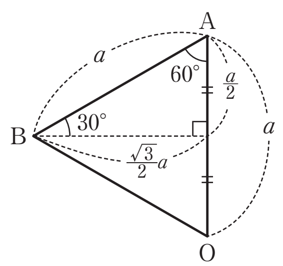


AB＝aだから，下図より，△OABの面積は，

$\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$と表される。

よって，$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ より，$a^2 = \frac{80}{3}$

$a > 0$だから，$a = \frac{4\sqrt{15}}{3}$



③ **大きさの異なる正三角形の重なりの面積を求める問題**

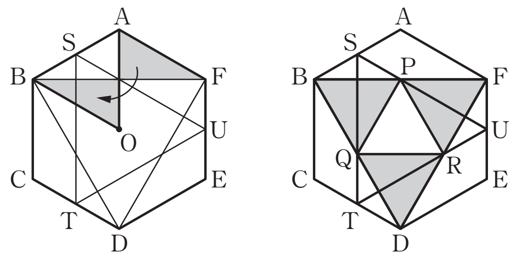
△ABF，△CDB，△EFDは合同な三角形だから，BF＝BD＝DFより，△BDFは正三角形である。

ここで，下の左図より，△ABF＝△OABとなるから，正六角形ABCDEF＝6△OABで，△ABF＋△CDB＋△EFD＝3△OABより，△BDF＝3△OABである。

よって，

△BDF＝3△OAB＝$3 \times \frac{20\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$

である。



また，上の右図のように，点Q，Rを決めると，点Qは線分BDの中点，点Rは線分DFの中点となる。

ここで，△BDFに中点連結定理を用いると，

PQ＝$\frac{1}{2}$FD，QR＝$\frac{1}{2}$BF，PR＝$\frac{1}{2}$BDだから，

PQ＝QR＝PRより，△PQRは正三角形である。

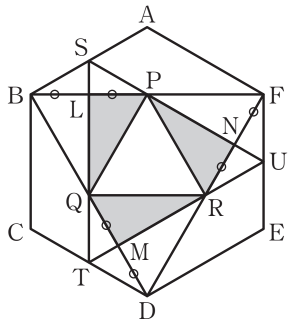
このとき，△PBQ，△QDR，△RFPは△PQRと合同な正三角形となるから，

△PQR＝△PBQ＝△QDR＝△RFP＝$\frac{1}{4}$△BDF＝$5\sqrt{3}$

である。

また，右の図のように，点L，M，Nを決めると，SU∥BEより，FN：NR＝1：1である。

同様にして，BL：LP＝1：1，DM：MQ＝1：1だから，



△PLQ＝△QMR＝△RNP＝$\frac{1}{2}$△PBQ＝$\frac{5\sqrt{3}}{2}$である。

以上のことから，求める斜線部分の面積である，六角形PLQMRNの面積は，

(六角形PLQMRNの面積)

＝△PQR＋△PLQ＋△QMR＋△RNP

$= 5\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 3$

$= \frac{25\sqrt{3}}{2}$

5 資料の活用の応用問題

1 資料を分析・判断して説明する問題

解き方の指針

(1) まゆさんの記録15mの入る階級である，14m以上17m未満の階級の度数を読み，相対度数を求める。
(2) 大きい方から100番以内に入るためには，中央値以上でなければならないことから判断する。

◆解答◆

(1) **0.15**
(2) **イ**
（説明・例） 中央値が16mなので，記録が16m以上の人は100人以上いて，まゆさんの記録15mは中央値の16mより小さいから。

◆解説◆

(1) **資料が含まれる階級の相対度数を求める問題**

まず，まゆさんの記録の入る階級をさがす。15mは，14m以上17m未満の階級に入るので，この階級の相対度数を求めればよい。
相対度数とは，ある階級の度数の，全体の度数に対する割合のことで，

$$\frac{（その階級の度数）}{（度数の合計）}$$

で求める。
度数の合計は200で，14m以上17m未満の階級の度数は30だから，$\frac{30}{200}=0.15$

(2) **中央値との大小関係を判断する問題**

中央値はメジアンともいい，資料ひとつひとつを大きさの順に並べたとき，中央に並ぶ資料の値のことである。

この問題の場合，度数の合計は200人だから，中央値は100番目の生徒と101番目の生徒の平均である。
また，度数分布表の階級の大きい方から，中央値をとる生徒がどの階級に入るかを調べると，$2+7+25+62=96$，$2+7+25+62+30=127$より，14m以上17m未満の階級である。
記録はすべて整数値なので，100番目と101番目の生徒はどちらも16mである（もし，異なる整数値であるなら，15mと17mであるが，これでは2人とも14m以上17m未満の階級に入ることに反するので問題に合わない）。
しかし，まゆさんの記録は15mで，中央値の16mより小さいからまゆさんは100番以内に入っていない，と考えられる。
この内容を，簡潔にまとめて，答案に書く。

2 代表値の変化から，資料を推理する問題

解き方の指針

(1) 弁当Bの平均値を求めて，弁当Aと比較する。続いて，弁当A，Bともに，販売個数の合計に対する木曜日の個数の割合をそれぞれ求め，比較する。
(2) まず，平均値の訂正から，誤っていた資料の値がどれだけ変わったかを求める。次に，その変化がどの曜日の資料で起これば，示された中央値の変化が起こるかを推理する。

◆解答◆

(1) **a…ウ，b…ア**　(2) **水曜日を71個に訂正した**

◆解説◆

(1) **平均値を求めて，資料の様子を比較する問題**

本問では，月曜日から土曜日の6日間における，弁当Aと弁当Bの販売個数を，平均値を用いて比較する。
弁当Aは全曜日の資料と平均値が示されている。
弁当Bは全曜日の資料のみ示され，平均値が示されていないので，まず，弁当Bの平均値を求める。

〈平均値〉
個々の資料の値の合計を資料の個数でわった値。

（平均値）＝（資料の値の合計）÷（資料の個数）で，
弁当Bの販売個数の平均値を求めると，
$(76+95+36+48+56+49)\div 6=360\div 6=60$（個）
よって，$x=60$である。

弁当Aの平均値は56，弁当Bの平均値は60であるから，平均値は弁当Bの方が大きい。→ウ
続いて，月曜日から土曜日までの販売個数に対する木曜日の販売個数の割合を求める。

弁当Aは，$48\div(56\times 6)=0.142\cdots$
弁当Bは，$48\div 360=0.133\cdots$

よって，弁当Aの方が大きい。→ア

補足

木曜日は，弁当A，弁当Bともに，販売個数は48個で等しいから，6日間の販売個数が少ない方が，割合は大きくなる。よって，Aと考えてもよい。

(2) **平均値と中央値の変化から，資料を推理する問題**

まず，正しい値への訂正によって，平均値が60個から60.5個になったから，1週間の販売個数の変化を求めると，

訂正前　$60\times 6=360$（個）
訂正後　$60.5\times 6=363$（個）

よって，どこか1つの曜日の売上個数が，3個増えたと考える。

次に，中央値について，まず，訂正前の6つの資料を，小さい順に並べかえると下のようになる。

31（月），42（金），56（土），68（水），70（火），93（木）

訂正前の中央値は，土曜日と水曜日の平均になり，
$(56+68)\div 2=62$（個）

まず，訂正前の小さい方から2番目である金曜日が誤りの場合，42個→45個となるが，小さい方から2番目のままなので中央値は変わらない。

次に，訂正前の小さい方から3番目である土曜日が誤りの場合，56個→59個となり，中央値は，$(59+68)\div 2=63.5$(個)となり，問題には合わない。

さらに，訂正前の小さい方から4番目である水曜日が誤りの場合，68→71となり，水曜日の71個は小さい方から5番目になる。よって中央値は，土曜日と火曜日の平均となり，$(56+70)\div 2=63$(個)となり，問題に合う。

これら以外の曜日が誤りと考えた場合，中央値の対象の3番目，4番目に変化はないので，中央値も62個のままだから問題に合わない。

よって，誤りは水曜日で，71個に訂正したことになる。

3 ヒストグラムを読み取る問題

解き方の指針

(1) 各階級の度数を数え，すべてたして合計を求める。
(2) 度数の合計30を2でわると15だから，15番目と16番目の生徒がどの階級に入るか，数えて求める。
(3) まず，1年1組で3冊以上の生徒の割合を求め，この中学校200人で同じ割合だと何人になるか求める。

◆解答◆

(1) **30人**
(2) **3冊**
(3) **120人**

◆解説◆

(1) **ヒストグラムから度数の合計を求める問題**

各階級の度数を数え，ヒストグラムの棒の近くに度数をかき込んでおき，全部数え終わったら，その数値をたして求める。

$2+7+3+4+5+4+3+2=30$(人)

度数分布表にまとめると，右の表のようになる。

冊数(冊)	生徒(人)
0	2
1	7
2	3
3	4
4	5
5	4
6	3
7	2
計	30

(2) **中央値を求める問題**

(1)で，度数の合計が30人と求められたので，15人目と16人目の2人の平均が，1年1組の中央値である。

冊数が少ない方から考えると，2冊以下の生徒は$2+7+3=12$(人)，3冊以下の生徒は$12+4=16$(人)より，15番目と16番目の生徒は，どちらも3冊であることがわかる。よって，1年1組の中央値は，3冊である。

別解

冊数が多い方から数えてもよい。4冊以上の生徒は，$2+3+4+5=14$(人)，3冊以上の生徒は，$14+4=18$(人)より，15番目の生徒と16番目の生徒はどちらも，3冊である。

(3) **相対度数が等しい，別の集団の問題**

まず，1年1組について，読んだ本が3冊以上の生徒の相対度数(割合)を求める。3冊以上の生徒は，$4+5+4+3+2=18$(人)より，3冊以上の生徒の相対度数は，$\frac{18}{30}=0.6$

よって，この中学校の3冊以上の生徒の割合(相対度数)も0.6だから，この中学校での3冊以上の生徒の人数は，$200\times 0.6=120$(人)

4 ヒストグラムと代表値

解き方の指針

(1) 「範囲」の定義の確認をする。
(2) 選択肢を1つずつ，正しいかどうか検証する。
(3) ある記録以上の生徒が半数以上であると判断できるのは，その記録が中央値以下のときである。中央値の数値と比較し，理由を記述する。

◆解答◆

(1) **9.5秒**
(2) **ア，エ**
(3) **29.2秒という記録は，中央値の29.5秒未満であるから。**

◆解説◆

(1) **範囲を求める問題**

表を見ると，資料の最大値は35.9秒，最小値は26.4秒である。(範囲)＝(資料の最大値)－(資料の最小値)だから，$35.9-26.4=9.5$(秒)

補足

〈範囲〉

資料の最大の値から最小の値をひいた差のことを，分布の範囲，またはレンジという。

(範囲)＝(資料の最大値)－(資料の最小値)

分布の様子を表す数値として，代表値とともによく使われる。

(2) **表と図から，正しいものを選ぶ問題**

表とヒストグラムを読み取って，アから順に検証する。

ア　最小値26.4秒を含むのは，26.0秒以上27.0秒未満の階級で，ヒストグラムを読むと，この階級の度数は2だから，正しい。
イ　階級の幅は，$27.0-26.0=1$(秒)だから誤り。
ウ　33.0秒以上34.0秒未満の階級が1人，34.0秒以上35.0秒未満の階級が5人，35.0秒以上36.0秒未満の階級が3人なので，$1+5+3=9$(人)だから，誤り。
エ　度数の合計は35，28.0秒以上29.0秒未満の階級の生徒は7人だから，相対度数は，$\frac{7}{35}=0.2$，正しい。
オ　表より，平均値は30.7秒だから，生徒35人の記録の合計は，$30.7\times 35=1074.5$(秒)，誤り。

以上より，正しいのは，アとエである。

(3) **代表値を選び，理由を説明する問題**

記録29.2秒のPさん以上の生徒が，生徒35人の半数以上である理由を説明するが，「半数以上」という言葉と結びつく代表値は，中央値であることを利用する。

$35\div 2=17$あまり1より，29.5秒の生徒が記録の大きい方から$17+1=18$(番目)になり，29.2秒のPさんより記録が大きい生徒は，生徒が少なくとも18人，つまり半数以上いることになる。