

11 ベクトル 内積の性質

重要

Q1 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=3, \vec{a} \cdot \vec{b}=2$ のとき, $|\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めなさい。

内積の性質

ベクトルの内積について, 次のことが成り立つ。

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ k は実数

1. ~ 5. を利用すると,

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

のような乗法公式と同じ式が成り立つことがわかる。

★ 考え方 ★

$|\vec{a} + \vec{b}|^2$ は, 内積の性質より,
 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$
 であるから, $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b}$
 で表すことができる。
 だから, まず $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ の値を
 求める。

答案

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 1^2 + 2 \times 2 + 3^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$ だから,
 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{14}$ 答

直接

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

と変形してよい。

重要

Q2 $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=2, |\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めなさい。

内積の性質の利用

$|m\vec{a} + n\vec{b}|$ のような式の値が与えられたとき, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めるには,
 $|m\vec{a} + n\vec{b}|^2 = m^2|\vec{a}|^2 + 2mn\vec{a} \cdot \vec{b} + n^2|\vec{b}|^2$
 となることを利用する。

★ 考え方 ★

まず $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ の両辺を 2 乗
 する。
 すると, 左辺は $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b}$
 で表すことができる。

答案

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 9 \text{ だから,} \\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 9 \\ 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 &= 9 \\ -2\vec{a} \cdot \vec{b} &= -11 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

..... 答

学習の目標

- ベクトルの大きさや内積の条件から, ベクトルの和や差などの大きさが求められるようになる。
- ベクトルの大きさの条件から, 内積が求められるようになる。

Q1 〈内積の性質〉について, まとめよう。

まとめ

- $\vec{a} \cdot \vec{a} =$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k($ $)$ k は実数

確認問題

$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=4, \vec{a} \cdot \vec{b}=3$ のとき, $|\vec{a} - \vec{b}|$ の値を求めなさい。

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - \text{} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 - 2 \times \text{} + \text{}^2 \\ &= \text{} \end{aligned}$$

$|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0$ だから,

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \text{}$$

Q2 〈内積の性質の利用〉について, まとめよう。

まとめ

$$|m\vec{a} + n\vec{b}|^2 = \text{}$$

確認問題

$|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=1, |\vec{a} + \vec{b}|=4$ のとき, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めなさい。

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \text{} \text{ だから,}$$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \text{} = \text{}$$

$$5^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \text{}^2 = 16$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{}$$

演習問題

1 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$ のとき、次の値を求めなさい。

→ **Q1**

* (1) $|\vec{a} - \vec{b}|$

(2) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$

2 次のようなベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めなさい。

→ **Q2**

* (1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a} - \vec{b}|=5$ のとき。

(2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $|2\vec{a} - \vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき。

3 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ で、 $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直である。次の問いに答えなさい。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めなさい。

(2) $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$ の値を求めなさい。

理解度チェック

★ 次の空欄をうめなさい。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} =$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k($ $)$ k は実数

(2) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 =$

$|m\vec{a} + n\vec{b}|^2 =$

1 次の問いに答えなさい。

$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ のとき、 $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ の値を求めなさい。

2 次の問いに答えなさい。

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $|3\vec{a} + \vec{b}|=7$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めなさい。

★自分でチェックしてみよう★

●内積の性質

項 目	1 回目 (/)	2 回目 (/)	3 回目 (/)	ここに戻る
内積の性質の公式がわかった	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1・2
ベクトルの大きさの2乗が求められた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
等式の両辺を2乗して計算できた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q2

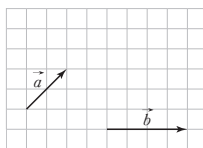
先生メモ

- ①ベクトルの基本的な表し方や成分表示の問題を解くことができる。
 ②内積の定義を覚え、内積の性質を使って問題を解くことができる。

1 次の問いに答えなさい。

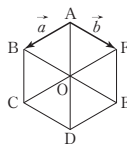
【各4点×5】

- (1) 右のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、 $2\vec{a} - \vec{b}$ を図示しなさい。



左図に記入

- (2) 正六角形 ABCDEF において、対角線 AD, BE, CF の交点を O とする。
 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{BD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。



- (3) $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ のとき、 $\vec{c} = (11, -2)$ を、適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表しなさい。

- (4) 2つのベクトル $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (x, 2-x)$ が平行になるように、 x の値を定めなさい。

- (5) 4点 A(1, 3), B(4, 1), C(7, 4), D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。頂点 D の座標を求めなさい。

小計

/20

2 次の問いに答えなさい。

【各4点×5】

- (1) 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC において、内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ の値を求めなさい。

- (2) 2つのベクトル $\vec{a} = (2, -\sqrt{3})$, $\vec{b} = (1, 3\sqrt{3})$ のなす角 θ を求めなさい。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (3) 2つのベクトル $\vec{a} = (x, -4)$, $\vec{b} = (3, x+1)$ が垂直になるような x の値を求めなさい。

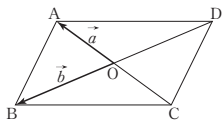
- (4) $\vec{a} = (4, -3)$ に垂直で、大きさが 10 のベクトル $\vec{b}$ を求めなさい。

- (5) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$ のとき、 $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$ の値を求めなさい。

小計

/20

- 3 平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。



このとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

【各 5 点 × 3】

- (1) $\overrightarrow{CD}$
- (2) $\overrightarrow{AC}$
- (3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

小計

15

- 4 $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (1, -1)$ とする。次の問いに答えなさい。 【(1) 5 点, (2) 10 点】

- (1) $\vec{x} - 2\vec{a} = \vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を求めなさい。
- (2) $\vec{a} + t\vec{b}$ の大きさが 5 となるような実数 t の値を求めなさい。

小計

15

- 5 3 点 A(0, 2), B(1, 0), C(2, 1) を頂点とする $\triangle ABC$ の面積を、次の手順で求めなさい。

【各 5 点 × 3】

- (1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めなさい。
- (2) $\angle BAC = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (3) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

小計

15

- 6 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$ のとき、次の問いに答えなさい。

【各 5 点 × 3】

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めなさい。
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。
ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。
- (3) $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直になるような実数 t の値を求めなさい。

小計

15

