

3

式と証明 二項定理の応用

学習の目標

- ① 二項定理を応用し、一般項やその係数が求められるようになる。
- ② 多項定理について理解し、一般項やその係数が求められるようになる。

重要

Q1

- (1) $(x-2y)^8$ を展開したとき、 x^2y^6 の係数を求めなさい。
- (2) $(1+x)^9$ を展開したとき、 x^5 の係数を求めなさい。

二項定理の応用

二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_n b^n \quad \text{P.8 ②}$$

二項定理の等式から、いろいろな等式を導くことができる。

二項定理の等式に、 $a=1$, $b=x$ を代入すると、

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_r x^r + \cdots + {}_nC_n x^n$$

二項定理の等式に、 $a=1$, $b=1$ を代入すると、

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_r + \cdots + {}_nC_n$$

★ 考え方 ★

二項定理の利用を考える。
 $(a+b)^n$ の展開式の一般項は
 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ と表される。
まず一般項を r の式で表して求める。

- (1) $a=x$, $b=-2y$, $n=8$
- (2) $a=1$, $b=x$, $n=9$

■ 答案

(1) 二項定理より、展開式の一般項は、

$${}_8C_r x^{8-r} (-2y)^r = {}_8C_r (-2)^r x^{8-r} y^r$$

x^2y^6 の係数は、 $r=6$ として、

$${}_8C_6 (-2)^6 = {}_8C_2 (-2)^6 = 28 \times 64 = 1792 \quad \cdots \cdots \text{答}$$

(2) 二項定理より、展開式の一般項は ${}_9C_r x^r$

x^5 の係数は、 $r=5$ として、

$${}_9C_5 = {}_9C_4 = 126 \quad \cdots \cdots \text{答}$$

重要

Q2

- $(a+b+c)^6$ の展開式における、 a^2bc^3 の係数を求めなさい。

$(a+b+c)^n$ の一般項

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ ($p+q+r=n$) の係数は、

p 個の a 、 q 個の b 、 r 個の c を並べる順列の総数に等しいから、

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし、} p+q+r=n$$

★ 考え方 ★

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の項の係数は、
 $\frac{n!}{p!q!r!}$
だから、 $n=6$, $p=2$, $q=1$,
 $r=3$ の場合を考える。

■ 答案

$(a+b+c)^6$ を展開したときの a^2bc^3 の係数は、 a を 2 個、 b を 1 個、 c を 3 個並べる順列の総数に等しいから、

$$\frac{6!}{2!1!3!} = 60 \quad \cdots \cdots \text{答}$$

Q1 〈二項定理の応用〉について、まとめよう。

まとめ

■ 二項定理 $(a+b)^n =$

二項定理の等式において、 $a=$, $b=$ を代入すると、

$$(1+x)^n =$$

二項定理の等式において、 $a=$, $b=$ を代入すると、

$$2^n =$$

確認問題

- ☐ (1) $(x-2y)^8$ の展開式における、 x^4y^4 の係数を求めなさい。
- ☐ (2) $(1+x)^9$ の展開式における、 x^6 の係数を求めなさい。

(1) 二項定理より、展開式の一般項は、整数 r ($0 \leq r \leq 8$) を用いて、

すなわち、 と表される。

$$x^4y^4 \text{ の係数は、} r= \text{ } \text{ として、} \text{ } = \text{ }$$

(2) 展開式の一般項は、整数 r ($0 \leq r \leq 9$) を用いて と表される。

$$x^6 \text{ の係数は、} r= \text{ } \text{ として、} \text{ } = \text{ }$$

Q2 〈 $(a+b+c)^n$ の一般項〉について、まとめよう。

まとめ

■ $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の項の係数は、

$$\text{ } \quad \text{ただし、} p+q+r= \text{ }$$

確認問題

- ☐ $(a+b+c)^6$ の展開式における、 a^3b^2c の係数を求めなさい。

a^3b^2c の係数は、 a を 個、 b を 個、 c を 個並べる順列の総数に等しいから、

$$\text{ } = \text{ }$$

演習問題

1 次の式を展開するとき、[] 中の項の係数を求めなさい。

→ Q1

□□ (1) $(x+3y)^6$ $[x^5y]$

※ □□ (2) $(x-2y)^8$ $[x^3y^5]$

※ □□ (3) $(1+x)^{10}$ $[x^3]$

□□ (4) $(2x-3y)^6$ $[x^3y^3]$

2 次の式の展開式における、[] 中の項の係数を求めなさい。

→ Q2

※ □□ (1) $(a+b+c)^6$ $[abc^4]$

□□ (2) $(x+y+z)^5$ $[x^2y^2z^2]$

□□ (3) $(a+b+c)^7$ $[a^2b^3c^2]$

□□ (4) $(x+y+z)^9$ $[x^4y^3z^2]$

3 ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$ が成り立つことを、二項定理を用いて証明しなさい。

□□

理解度チェック

★ 次の空欄をうめなさい。

□□ (1) 二項定理を用いることにより、 $(1+x)^n$ の展開式は、次のようになる。

$(1+x)^n =$

この等式に $x=$ を代入すると、次のような 2^n についての等式が得られる。

$2^n =$

□□ (2) $(a+b+c)^n$ を展開したときの $a^a b^b c^c$ の係数は、 a を 個、 b を 個、 c を

個並べる順列の総数に等しいから、 ただし、 $= n$

1 次の式を展開するとき、[] 中の項の係数を求めなさい。

□□ (1) $(x-3y)^6$ $[x^3y^3]$

□□ (2) $(2x-y)^8$ $[x^2y^6]$

2 次の式を展開するとき、[] 中の項の係数を求めなさい。

□□ (1) $(a+b+c)^4$ $[ab^2c]$

□□ (2) $(x+y+z)^8$ $[xyz^6]$

★自分でチェックしてみよう★

●二項定理の応用

項 目	1 回目(/)	2 回目(/)	3 回目(/)	ここに戻る
二項定理の応用について理解し、展開式の一般項や係数が求められた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
多項定理について理解し、展開式の係数が求められた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q2

先生メモ

① 整式の除法や、分数式の計算ができるようになる。

② 恒等式について理解し、等式・不等式の証明ができるようになる。

1 次の問いに答えなさい。

【各5点×5】

(1) 次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求めなさい。

① $A = 2x^3 - 3x^2 + x - 7, B = 2x^2 + 3x + 4$

商 :

余り :

② $A = 3x^3 - 5x + 4, B = x + 2$

商 :

余り :

(2) 次の計算をなさい。

① $\frac{x-4}{x-1} \div \frac{x^2-2x-8}{x^2+x-6} \times \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$

② $\frac{x+5}{x^2+4x+3} - \frac{x+4}{x^2+5x+6}$

③ $\frac{a + \frac{ab}{a-b}}{a - \frac{ab}{a+b}}$

小計

/25

2 次の問いに答えなさい。

【各5点×4】

(1) 次の等式が x についての恒等式であるとき、定数 a, b, c の値を求めなさい。

① $a(x-2)^2 + b(x-2) + c = x^2$

② $\frac{x+7}{(2x-1)(3x+1)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{3x+1}$

(2) $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ のとき、 $\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$ の値を求めなさい。ただし、 x, y, z は0でない実数とする。(3) $x > 0$ のとき、 $x + \frac{4}{x}$ の最小値と、そのときの x の値を求めなさい。

最小値 :

 $x =$

小計

/20

- 3 x についての整式 $x^3 + ax^2 + 4x + 2$ を $x^2 + x - 1$ で割ると余りが $3x + 4$ となった。このとき、 a の値と商を求めなさい。 【10 点】



- 4 次の問いに答えなさい。 【(1) 5 点, (2) 10 点】
- (1) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ であることを証明しなさい。
- (2) $x - y = 2$ のとき、
 $x^2 + y^2 - 8 = 2(xy - x + y)$ であることを証明しなさい。



- 5 次の問いに答えなさい。 【各 5 点 × 2】
- (1) $x > y$, $x > z$ のとき、 $x^2 + yz > x(y + z)$ であることを証明しなさい。
- (2) $a \geq b$ のとき、 $a^3 \geq b^3$ であることを証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときが答えなさい。



- 6 次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときが答えなさい。 【各 10 点 × 2】
- (1) $a \geq b > 0$ のとき、 $\sqrt{a - b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
- (2) $a > 0$, $b > 0$ のとき、 $\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{b}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{3}{a}\right) \geq 6$



