1-1 2乗に比例する関数

学習の内容
yがxの2乗に比例する関数($y=ax^2$)の基本事項を学習します。
関数$y=ax^2$のグラフの特徴を確かめて，問題で利用できるようにしておきましょう。

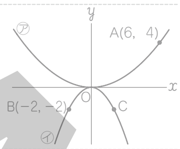
例題 1
yはxの2乗に比例し，$x=2$のとき，$y=-1$となります。
(1)　yをxの式で表しましょう。　(2)　$x=-4$のときのyの値を求めましょう。

POINT　yがxの2乗に比例する関数の式…$y=ax^2$

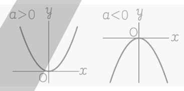
CHECK 空所をうめよう
(1)　求める式を$y=ax^2$として，$x=2$，$y=-1$を代入すると，
$\boxed{-1}=a\times\boxed{2}^2$
$\boxed{4}a=\boxed{-1}$
$a=\boxed{-\frac{1}{4}}$
よって，$y=\boxed{-\frac{1}{4}}x^2$

(2)　$y=\boxed{-\frac{1}{4}}x^2$に$x=\boxed{-4}$を代入して，
$y=\boxed{-\frac{1}{4}}\times(\boxed{-4})^2$
$=\boxed{-4}$

例題 2
右の図で，㋐は関数$y=ax^2$のグラフ，
㋑は関数$y=bx^2$のグラフです。
㋐はA(6，4)，㋑はB(−2，−2)を通ります。
(1)　a，bの値をそれぞれ求めましょう。
(2)　㋑上にあって，Bとy座標が等しい点Cのx座標を求めましょう。



POINT　$y=ax^2$のグラフ(放物線)の特徴
①　原点を通り，y軸について対称
②　$a>0$⇒上に開いた形，$a<0$⇒下に開いた形
③　aの絶対値が大きいほど，開き具合は小さい



CHECK 空所をうめよう
(1)　aの値…$y=ax^2$に$x=\boxed{6}$（Aのx座標），$y=\boxed{4}$（Aのy座標）を代入して，$a=\boxed{\frac{1}{9}}$
bの値…$y=bx^2$に$x=\boxed{-2}$，$y=\boxed{-2}$を代入して，$b=\boxed{-\frac{1}{2}}$
(2)　㋑の式$y=\boxed{-\frac{1}{2}}x^2$に$y=\boxed{-2}$を代入して，$\boxed{-2}=\boxed{-\frac{1}{2}}x^2$
これを解くと，$x=\pm\boxed{2}$　$x>0$より，Cのx座標は$\boxed{2}$
※CはBとy軸について対称な点になっていることを確かめましょう。

Q1 練習しよう

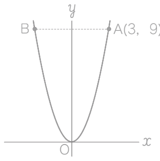
□(1)　yはxの2乗に比例し，$x=3$のとき，$y=18$となります。
□①　yをxの式で表しましょう。　〔 $y=2x^2$ 〕
□②　$x=-1$のときのyの値を求めましょう。　〔 $y=2$ 〕

□(2)　yはxの2乗に比例し，$x=-6$のとき，$y=12$となります。
□①　yをxの式で表しましょう。　〔 $y=\frac{1}{3}x^2$ 〕
☆□②　$y=3$となるxの値をすべて求めましょう。　〔 $x=\pm3$ 〕

HINT　(2)②　xの値は正と負の2種類があることに気をつけよう。

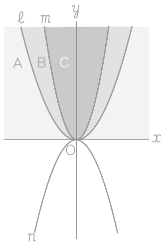
Q2 練習しよう

□(1)　右の図で，関数$y=ax^2$のグラフがA(3，9)を通っています。



□①　aの値を求めましょう。　〔 $a=1$ 〕
□②　このグラフ上にあって，Aとy座標が等しい点をBとします。Bの座標を求めましょう。　〔 −3 ， 9 〕

☆□(2)　右の図のℓ，m，nは，次の3つの関数㋐〜㋒のグラフのうちのどれかを表しています。
㋐　$y=x^2$　㋑　$y=-\frac{1}{2}x^2$　㋒　$y=\frac{1}{3}x^2$



□①　nのグラフの式を選びましょう。　〔 ㋑ 〕
□②　ℓ，mのグラフの式をそれぞれ選びましょう。　ℓ〔 ㋒ 〕m〔 ㋐ 〕
□③　$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフをpとします。pは，図のA，B，Cのうちどこを通りますか。　〔 B 〕

HINT　(2)③　$y=ax^2$のaの絶対値を利用して，グラフの開き具合をくらべよう。

解説

Q1

式を$y=ax^2$とおいて，対応するxとyの値を代入すると，aの値がわかります。
このようにして求めた式に，x（またはy）の値を代入し，y（またはx）の値を求めます。

(2)①　$y=ax^2$に$x=-6$，$y=12$を代入すると，$12=a\times(-6)^2$
$$36a=12$$
$$a=\frac{1}{3}$$

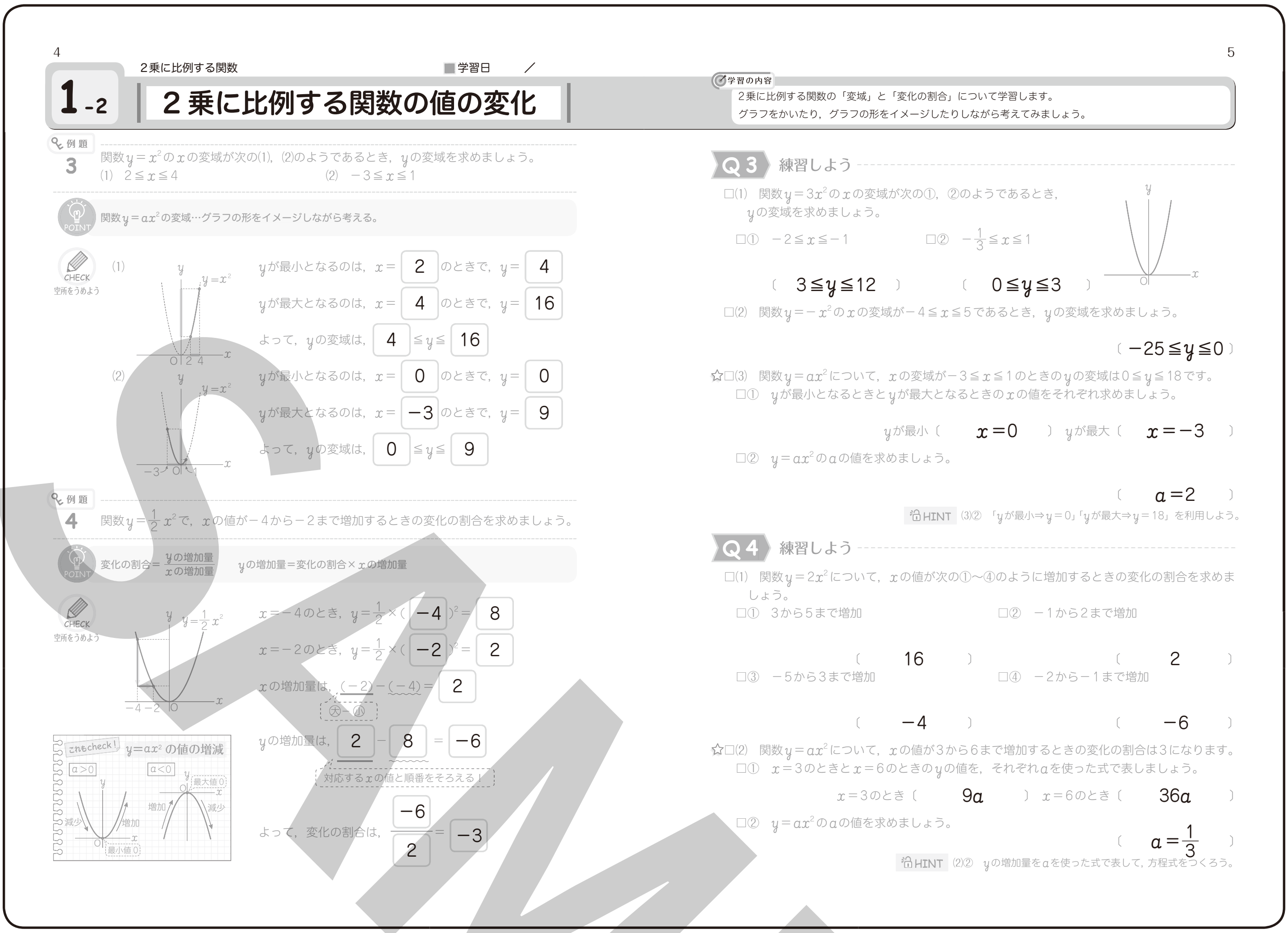
②　$y=\frac{1}{3}x^2$に$y=3$を代入すると，$3=\frac{1}{3}x^2$
$$x^2=9$$
$$x=\pm3$$

Q2

(1)①　グラフの式$y=ax^2$に，グラフが通る点Aの座標$x=3$，$y=9$を代入すると，$9=a\times3^2$
$$9a=9$$
$$a=1$$

②　Aとy座標が等しい点Bの座標は，①から求めた式$y=x^2$に$y=9$を代入して求めることもできますが，「放物線はy軸について対称である」という性質を用いて，Aとy軸について対称な点の座標として求めることもできます。y軸について対称な点は，x座標の符号を変えて，y座標はそのままだから，Bの座標は(−3，9)

(2)　放物線の特徴を利用します。
①　nのグラフは下に開いています。このとき，$a<0$だから，nの式は㋑になります。
②　ℓとmのグラフでは，mの方が開き具合が小さくなっています。aの絶対値が大きいほどグラフの開き具合が小さいから，㋐のaの絶対値1と㋒のaの絶対値$\frac{1}{3}$をくらべて，ℓの式はaの絶対値が小さい㋒，mの式はaの絶対値が大きい㋐です。
③　aの絶対値をくらべると，$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$だから，$p$の開き具合は$\ell$よりも小さく，$m$よりも大きいことがわかります。
よって，図のBを通ります。



1-2 2乗に比例する関数の値の変化

学習の内容
2乗に比例する関数の「変域」と「変化の割合」について学習します。
グラフをかいたり，グラフの形をイメージしたりしながら考えてみましょう。

例題 3 関数$y=x^2$のxの変域が次の(1)，(2)のようであるとき，yの変域を求めましょう。
(1) $2 \leqq x \leqq 4$　(2) $-3 \leqq x \leqq 1$

POINT 関数$y=ax^2$の変域…グラフの形をイメージしながら考える。

CHECK 空所をうめよう
(1) yが最小となるのは，$x=\boxed{2}$のときで，$y=\boxed{4}$
yが最大となるのは，$x=\boxed{4}$のときで，$y=\boxed{16}$
よって，yの変域は，$\boxed{4} \leqq y \leqq \boxed{16}$
(2) yが最小となるのは，$x=\boxed{0}$のときで，$y=\boxed{0}$
yが最大となるのは，$x=\boxed{-3}$のときで，$y=\boxed{9}$
よって，yの変域は，$\boxed{0} \leqq y \leqq \boxed{9}$

例題 4 関数$y=\frac{1}{2}x^2$で，xの値が-4から-2まで増加するときの変化の割合を求めましょう。

POINT 変化の割合$=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$　yの増加量＝変化の割合×xの増加量

CHECK 空所をうめよう
$x=-4$のとき，$y=\frac{1}{2}\times(\boxed{-4})^2=\boxed{8}$
$x=-2$のとき，$y=\frac{1}{2}\times(\boxed{-2})^2=\boxed{2}$
xの増加量は，$(-2)-(-4)=\boxed{2}$
（大－小）
yの増加量は，$\boxed{2}-\boxed{8}=\boxed{-6}$
対応するxの値と順番をそろえる！
よって，変化の割合は，$\dfrac{\boxed{-6}}{\boxed{2}}=\boxed{-3}$

これcheck！ $y=ax^2$の値の増減
$a>0$：減少　増加　最小値0
$a<0$：増加　減少　最大値0

Q3 練習しよう
□(1) 関数$y=3x^2$のxの変域が次の①，②のようであるとき，yの変域を求めましょう。
□① $-2 \leqq x \leqq -1$　□② $-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1$
（$3 \leqq y \leqq 12$）　（$0 \leqq y \leqq 3$）
□(2) 関数$y=-x^2$のxの変域が$-4 \leqq x \leqq 5$であるとき，yの変域を求めましょう。
（$-25 \leqq y \leqq 0$）
☆□(3) 関数$y=ax^2$について，xの変域が$-3 \leqq x \leqq 1$のときのyの変域は$0 \leqq y \leqq 18$です。
□① yが最小となるときとyが最大となるときのxの値をそれぞれ求めましょう。
yが最小（$x=0$）　yが最大（$x=-3$）
□② $y=ax^2$のaの値を求めましょう。
（$a=2$）
HINT (3)② 「yが最小⇒$y=0$」「yが最大⇒$y=18$」を利用しよう。

Q4 練習しよう
□(1) 関数$y=2x^2$について，xの値が次の①～④のように増加するときの変化の割合を求めましょう。
□① 3から5まで増加　□② -1から2まで増加
（16）　（2）
□③ -5から3まで増加　□④ -2から-1まで増加
（-4）　（-6）
☆□(2) 関数$y=ax^2$について，xの値が3から6まで増加するときの変化の割合は3になります。
□① $x=3$のときと$x=6$のときのyの値を，それぞれaを使った式で表しましょう。
$x=3$のとき（$9a$）　$x=6$のとき（$36a$）
□② $y=ax^2$のaの値を求めましょう。
（$a=\frac{1}{3}$）
HINT (2)② yの増加量をaを使った式で表して，方程式をつくろう。

解説

Q3

(2) 式が$y=-x^2$で，xの変域に0がふくまれるから，yの最大の値は0になります。
$x=-4$のとき，$y=-16$，$x=5$のとき，$y=-25$だから，yの最小の値は-25になります。
よって，yの変域は，$-25 \leqq y \leqq 0$

(3)① $y=ax^2$で，yの値が0となるときのxの値は0です。また，yの最小の値が0だから，$a>0$であることがわかります。
yが最大となるのは，x^2の値が最大となるときだから，yが最大の18となるときのxの値は-3になります。
② ①より，$y=ax^2$に$x=-3$，$y=18$を代入して，$18=a\times(-3)^2$
$9a=18$
$a=2$　（$a>0$に適する）

Q4

(1)① $x=3$のとき，$y=18$，$x=5$のとき，$y=50$
変化の割合は，$\dfrac{50-18}{5-3}=\dfrac{32}{2}=16$

② $x=-1$のとき，$y=2$，$x=2$のとき，$y=8$
変化の割合は，$\dfrac{8-2}{2-(-1)}=\dfrac{6}{3}=2$

③ $x=-5$のとき，$y=50$，$x=3$のとき，$y=18$
変化の割合は，$\dfrac{18-50}{3-(-5)}=\dfrac{-32}{8}=-4$

④ $x=-2$のとき，$y=8$，$x=-1$のとき，$y=2$
変化の割合は，$\dfrac{2-8}{-1-(-2)}=\dfrac{-6}{1}=-6$

(2)① $x=3$のとき，$y=a\times3^2=9a$，$x=6$のとき，$y=a\times6^2=36a$
② xの値が3から6まで増加するときの変化の割合は，$\dfrac{36a-9a}{6-3}=\dfrac{27a}{3}=9a$
これが3に等しいから，$9a=3$　よって，$a=\frac{1}{3}$

※関数$y=ax^2$で，xの値がmからnまで増加するときの変化の割合は，$a(m+n)$の値に等しくなります。
［求め方］ $y=ax^2$で，$x=m$のとき，$y=am^2$，$x=n$のとき，$y=an^2$
変化の割合は，$\dfrac{an^2-am^2}{n-m}=\dfrac{a(n^2-m^2)}{n-m}=\dfrac{a(n+m)(n-m)}{n-m}=a(m+n)$