

1

整式の計算

ポイント1 整式

◆ **単項式と多項式**……数や文字の積で表された式を**単項式**という。また、単項式の和として表される式を**多項式**といい、各単項式をその多項式の**項**という。単項式と多項式を合わせたものを**整式**という。

◆ **同類項**……多項式の中で文字の部分と同じ項を**同類項**という。同類項はまとめることができる。

例 $3a^2 - ab + 2b^2 + 5ab - 3b^2 + 4a^2 = (3+4)a^2 + (-1+5)ab + (2-3)b^2 = 7a^2 + 4ab - b^2$

◆ **次数**……単項式では、掛け合わされた文字の個数を**次数**、数の部分を**係数**という。多項式では、各項の次数のうち最高のもをその多項式の**次数**という。また、多項式では、次数が0の項を**定数項**という。

◆ **特定の文字に着目**……ある特定の文字に着目して、他の文字を数と見なして取り扱うことがある。

例 ① $-3x^3y^2 - 3x^3y^2 = -3 \times x \times x \times x \times y \times y$ より、文字5個の積だから、次数5、係数-3
 x に着目すると、 $-3x^3y^2 = (-3 \times y \times y) \times x \times x \times x$ だから、次数3、係数 $-3y^2$

② $a^3 - 4a^2b^2 + 5b^3 - 2$ a^3 は3次、 $-4a^2b^2$ は4次、 $5b^3$ は3次だから、次数4、定数項 -2
 b に着目すると、 a^3 は0次、 $-4a^2b^2$ は2次、 $5b^3$ は3次、 -2 は0次だから、次数3、定数項 $a^3 - 2$

◆ **多項式の整理**……整式を、項の次数の高い方から順に並べることを**降べきの順**に整理するといひ、項の次数の低い方から順に並べることを**昇べきの順**に整理するといひ。

例 $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + y + 1$ $\begin{cases} x \text{ について降べきの順に整理} \Rightarrow x^2 + (2y-3)x + 5y^2 + y + 1 \\ y \text{ について降べきの順に整理} \Rightarrow 5y^2 + (2x+1)y + x^2 - 3x + 1 \end{cases}$

確認問題1

次の問いに答えなさい。

□(1) 次の多項式の同類項をまとめて整理しなさい。

□① $6x - 9x + x$

□② $3a^2 - a + 1 + a^2 - 5a$

□③ $2x^2 - xy - 7y^2 + 4xy - y^2 + 6x^2$

□(2) 次の単項式の次数と係数を答えなさい。また、[]内の文字に着目したときの次数と係数を答えなさい。

□① $2x^2y$ [y]

□② $-a^3b^2$ [a]

□③ $\frac{1}{3}ax^2y^2$ [x]

□④ $-\frac{3}{7}xy^2z^3$ [x と z]

□(3) 次の多項式の次数を答えなさい。また、[]内の文字に着目したときの次数と定数項を答えなさい。

□① $ab + bc + ca$ [a]

□② $x^3 + 2x^2y - 3y^2$ [y]

□③ $3ax^3 - abx^2 + 4ax - ab^3$ [x]

□④ $a^2 - 3ab^2 + 4a^2b - ab - 9$ [b]

□(4) 次の式を、 x について降べきの順に整理しなさい。

□① $x^3 + 5x - 1 - 3x^2$

□② $2ax + a - x^2 - bx$

□③ $4x^2 - xy + 3y^2 - x - 2y + 1$

□④ $x^3 - 3xy + 7x^2y - 3 + x^2 + 4x$

ポイント2 整式の加法・減法

◆ 整式の計算法則……多項式の加法・減法・乗法は、次の計算法則をもとに行う。

- ① 交換法則 $A+B=B+A$ $AB=BA$
 ② 結合法則 $(A+B)+C=A+(B+C)$ $(AB)C=A(BC)$
 ③ 分配法則 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

【例題】 $A=2x^2-3xy+y^2$, $B=5x^2+4xy-3y^2$ のとき, $A-B$, $-3A+2B$ を計算しなさい。

【解法】 A , B に整式を代入するときは, かっこをつけて代入する。

$$\begin{aligned} A-B &= (2x^2-3xy+y^2) - (5x^2+4xy-3y^2) & -3A+2B &= -3(2x^2-3xy+y^2) + 2(5x^2+4xy-3y^2) \\ &= 2x^2-3xy+y^2-5x^2-4xy+3y^2 & &= -6x^2+9xy-3y^2+10x^2+8xy-6y^2 \\ &= (2-5)x^2 + (-3-4)xy + (1+3)y^2 & &= (-6+10)x^2 + (9+8)xy + (-3-6)y^2 \\ &= -3x^2-7xy+4y^2 & &= 4x^2+17xy-9y^2 \end{aligned}$$

確認問題2 次の整式 A , B について, $A+B$, $A-B$, $2A-3B$ をそれぞれ計算しなさい。

□(1) $A=2a^2-7a-3$, $B=a^2+5a-4$

□(2) $A=x^2+4xy-y^2$, $B=-3x^2-xy+2y^2$

ポイント3 整式の乗法

◆ 指数法則…… m , n が正の整数のとき, 次の指数法則が成り立つ。

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

【例】 ① $3x^3 \times 5x^4 = 3 \times 5 \times x^3 \times x^4$ ② $(-3ab)^2 \times (-2a^2b)^3 = (-3)^2 a^2 b^2 \times (-2)^3 (a^2)^3 b^3$
 $= 15x^{3+4}$ $= 9a^2 b^2 \times (-8)a^{2 \cdot 3} b^3$
 $= 15x^7$ $= 9 \cdot (-8)a^{2+6} b^{2+3} = -72a^8 b^5$

※ $2 \cdot 3$ の $\cdot$ は, 積を表す記号である。

◆ 多項式の乗法……単項式と多項式の積, 多項式と多項式の積は分配法則を利用する。

【例】 ① $3ab(a^2-2b)$ ② $(2x-3)(x^2-x+4) = 2x(x^2-x+4) - 3(x^2-x+4)$
 $= 3ab \cdot a^2 - 3ab \cdot 2b$ $= 2x^3 - 2x^2 + 8x - 3x^2 + 3x - 12$
 $= 3a^3b - 6ab^2$ $= 2x^3 - 5x^2 + 11x - 12$

確認問題3 次の問いに答えなさい。

□(1) 次の計算をしなさい。

□① $a^2 \times a^4$

□② $(x^3)^4$

□③ $(-5ab^3)^2$

□④ $3xy^2 \times (-4x^3y^5)$

□⑤ $(-2a^2b)^4 \times 5a^2b$

□⑥ $(-xy)^2 \times (-3x^3y^2)^3$

□(2) 次の計算をしなさい。

□① $2x^2y(3x-4y)$

□② $a(4a-3b) - 5b(a+2b)$

□③ $(x-2)(x^2+3x-5)$

□④ $(x^2-2xy+3y^2)(x+4y)$

ポイント 4 乗法公式 I

◆ 基本的な乗法公式……中学で既に学習したもの。

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

例 ① $(x+3)^2$

$=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$

$=x^2+6x+9$

② $(3x-4y)^2$

$= (3x)^2-2\cdot 3x\cdot 4y+(4y)^2$

$= 9x^2-24xy+16y^2$

③ $(3a+b)(3a-b)$

$= (3a)^2-b^2$

$= 9a^2-b^2$

④ $(x-5)(x+3)$

$= x^2+(-5+3)x+(-5)\cdot 3$

$= x^2-2x-15$

⑤ $(2x+3y)(2x-y)$

$= (2x)^2+(3y-y)\cdot 2x+3y\cdot (-y)$

$= 4x^2+4xy-3y^2$

確認問題 4 次のを展開しなさい。

□(1) $(x+7)^2$

□(2) $(a+5b)^2$

□(3) $(2x+3y)^2$

□(4) $(x-6)^2$

□(5) $(4x-y)^2$

□(6) $(5a-2b)^2$

□(7) $(x+9)(x-9)$

□(8) $(x-8y)(x+8y)$

□(9) $(7a+2b)(7a-2b)$

□(10) $(x+3)(x+6)$

□(11) $(x-5)(x-2)$

□(12) $(x+9)(x-8)$

□(13) $(x-8y)(x+3y)$

□(14) $(2x-3)(2x-5)$

□(15) $(3x+7y)(3x-y)$

ポイント 5 乗法公式 II

◆ 1次式 $ax+b$ と $cx+d$ の積の乗法公式……次の展開結果から、乗法公式④が得られる。

$$(ax+b)(cx+d)=ax(cx+d)+b(cx+d)=acx^2+adx+bcx+bd=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

例 ① $(x+4)(2x+7)$

$= 1\cdot 2x^2+(1\cdot 7+4\cdot 2)x+4\cdot 7$

$= 2x^2+15x+28$

② $(3x+2y)(4x-3y)$

$= 3\cdot 4x^2+ \{3\cdot (-3y)+(2y)\cdot 4\}x+2y\cdot (-3y)$

$= 12x^2-xy-6y^2$

確認問題 5 次のを展開しなさい。

□(1) $(x+2)(2x+3)$

□(2) $(x-4)(3x+1)$

□(3) $(2x-3)(x-7)$

□(4) $(3x+5)(x-2)$

□(5) $(2x-1)(5x-3)$

□(6) $(4x+3)(3x+2)$

□(7) $(x+y)(3x-2y)$

□(8) $(3x-8y)(2x+y)$

□(9) $(5x-y)(3x-4y)$

ポイント 6 乗法公式Ⅲ

◆ 3乗の和・差になる乗法公式……次の展開結果から、乗法公式⑤が得られる。

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) \\&= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) \\&= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) \\&= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2) \\&= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3\end{aligned}$$

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

例 ① $(x+2)(x^2-2x+4)$
 $= (x+2)(x^2-x \cdot 2+2^2)$
 $= x^3+2^3=x^3+8$

② $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
 $= (x-3y)\{x^2+x \cdot 3y+(3y)^2\}$
 $= x^3-(3y)^3=x^3-27y^3$

確認問題 6 次の式を展開しなさい。

□(1) $(x+1)(x^2-x+1)$ □(2) $(x+5)(x^2-5x+25)$ □(3) $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$

□(4) $(x-2)(x^2+2x+4)$ □(5) $(x-6)(x^2+6x+36)$ □(6) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

□(7) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$ □(8) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

ポイント 7 乗法公式Ⅳ

◆ 和・差の3乗の乗法公式…… $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ の展開結果から、乗法公式⑥が得られる。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\&= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\&= (a-b)(a^2-2ab+b^2) \\&= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2) \\&= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

例 ① $(x+2)^3$
 $= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$
 $= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

② $(3x-2y)^3$
 $= (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3$
 $= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

確認問題 7 次の式を展開しなさい。

□(1) $(x+1)^3$ □(2) $(x+4)^3$ □(3) $(x+3y)^3$

□(4) $(x-2)^3$ □(5) $(x-6)^3$ □(6) $(x-5y)^3$

□(7) $(3x+1)^3$ □(8) $(2x-3)^3$ □(9) $(3x-4y)^3$

ポイント 8 いろいろな展開 I

例題 次の式を展開しなさい。

(1) $(a-b+c)^2$

(2) $(x+y-z)(x-y+z)$

解法 多項式の一部を1つの文字に置き換え、乗法公式を利用して展開する。

(1) $a-b=X$ とおくと、

(2) $(x+y-z)(x-y+z)$

$(a-b+c)^2 = (X+c)^2$

$= \{x + (y-z)\} \{x - (y-z)\}$

$= X^2 + 2cX + c^2$

ここで、 $y-z=X$ とおくと、

$= (a-b)^2 + 2c(a-b) + c^2$ $\leftarrow$ X を $a-b$ に戻す。

$= (x+X)(x-X) = x^2 - X^2$ $\leftarrow$ X を $y-z$ に戻す。

$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ca - 2bc + c^2$

$= x^2 - (y-z)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

$= x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$

確認問題 8 次式を展開しなさい。

☐ (1) $(a+b+c)^2$

☐ (2) $(x-y-3)^2$

☐ (3) $(x-3y+2z)^2$

☐ (4) $(x+y+5)(x+y-5)$

☐ (5) $(2a+b+3)(2a+b-2)$

☐ (6) $(x^2-x-3)(x^2-x+1)$

☐ (7) $(x+y+2)(x-y+2)$

☐ (8) $(a+b+c)(a-b-c)$

☐ (9) $(x-3y+1)(x+3y-1)$

ポイント 9 いろいろな展開 II

例題 次式を展開しなさい。

(1) $(x+y)^2(x-y)^2$

(2) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

解法 積の組み合わせを工夫して、効率よく展開する。

(1) $(x+y)^2(x-y)^2$

(2) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

$= \{(x+y)(x-y)\}^2$

$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)$ $\leftarrow$ $(x-1)$ と $(x+2)$, $(x-3)$ と $(x+4)$ をそれぞれ組み合わせる。

$= (x^2-y^2)^2$

ここで、 $x^2+x=X$ とおくと、

$= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + (y^2)^2$

$= (X-2)(X-12) = X^2 - 14X + 24$ $\leftarrow$ X を x^2+x に戻す。

$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

$= (x^2+x)^2 - 14(x^2+x) + 24$

$= x^4 + 2x^3 + x^2 - 14x^2 - 14x + 24 = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

確認問題 9 次式を展開しなさい。

☐ (1) $(x+3)^2(x-3)^2$

☐ (2) $(a+2b)^2(a-2b)^2$

☐ (3) $(x-1)^3(x+1)^3$

☐ (4) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$

☐ (5) $(9x^2+y^2)(3x+y)(3x-y)$

☐ (6) $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$

☐ (7) $(x-2)(x-5)(x-3)(x-4)$

練成問題

【1】 次の整式の同類項をまとめなさい。また、〔 〕内の文字に着目したとき、その次数と定数項を答えなさい。

□(1) $3x - y - 8x + 2x^2 + 2y - x^2$ 〔 x 〕

□(2) $a^2b^2 + 4ab - ab - 3a^2b^2 - 6a - 2b + 1$ 〔 b 〕

□(3) $x^3 - 3xy^2 - 5xy + 2ay + y^3 - 2xy - ay - 3$ 〔 y 〕

【2】 $A = x^2 - 4xy - 3y^2$, $B = 2x^2 - xy - y^2$, $C = -x^2 + y^2$ のとき、次の計算をなさい。

□(1) $A + B - C$

□(2) $2A - B + 5C$

【3】 次の(1)～(3)を計算しなさい。また、(4)～(18)の式を展開しなさい。

□(1) $3x^4 \times (-7x^5)$

□(2) $5a^2b^3 \times (2a^3b)^3$

□(3) $(-2xy^2)^2 \times (-3x^2y)^4$

□(4) $-ab(2a^2 - b + 5)$

□(5) $(x - 3y)(x^2 - 2xy - 5y^2)$

□(6) $(a + 7b)^2$

□(7) $(4x - 5y)^2$

□(8) $(2a + 5)(2a - 5)$

□(9) $(3x - 7y)(3x + 7y)$

□(10) $(x + 7y)(x - 6y)$

□(11) $(2a - 8)(2a - 3)$

□(12) $(2x - 5)(3x + 4)$

□(13) $(3x + 8)(4x - 5)$

□(14) $(4a - 3b)(5a - b)$

□(15) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

□(16) $(3a - 5b)(9a^2 + 15ab + 25b^2)$

□(17) $(a + 4b)^3$

□(18) $(2x - 5y)^3$

【4】 次の式を展開しなさい。

□(1) $(2a - b - c)^2$

□(2) $(x + 2y + 5)(x + 2y - 5)$

□(3) $(a - 3b - 1)(a - 3b + 3)$

□(4) $(x^2 + 4x - 1)(x^2 - 4x + 1)$

□(5) $(a - 2b)(a + 2b)(a^2 + 4b^2)$

□(6) $(3x + 1)^2(3x - 1)^2$

□(7) $(x + 1)^2(x - 3)^2$

□(8) $(a - b)^2(a + b)^2(a^2 + b^2)^2$

□(9) $(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2$

□(10) $(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$

□(11) $(x - 2)^3(x + 2)^3$

□(12) $(x + 1)(x + 3)(x - 5)(x - 7)$