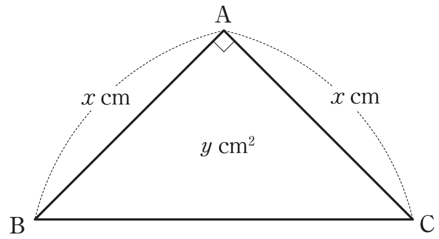
14 2乗に比例する関数

学習日　　月　　日

ポイント 1　y が x の2乗に比例する関数について，学習しよう。

Q 右の図のような，AB＝AC の直角二等辺三角形があります。AB＝AC＝x cm としたときの △ABC の面積を y cm^2 とするとき，x と y の関係について，調べてみよう。



A y を x の式で表すと，$y=\frac{1}{2}x^2$ となります。

この式にあてはめて，x の値に対応する y の値がどのように変化するかを調べると，次のようになります。

2倍　3倍

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	18	$\frac{49}{2}$	32	$\frac{81}{2}$	50

4倍　9倍

このように，$y=\frac{1}{2}x^2$ では，x の値が n 倍になると，y の値は n^2 倍になります。

ここで，$y=\frac{1}{2}x^2$ の x の値を負の数まで拡張して考えても，やはり同じ結果になります。

2倍　4倍

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

4倍　16倍

◆2乗に比例する関数◆

2つの量 x，y の間に，$y=ax^2$（a は定数）という関係があるとき，
y は x^2 に比例するといい，a を比例定数といいます。

例題 y は x の2乗に比例し，$x=2$ のとき，$y=8$ です。$x=-4$ のときの y の値を求めなさい。

解き方 y が x の2乗に比例するときには，比例定数を a とすると，$y=ax^2$ が成り立ちます。

まず，この式に x，y の値を代入して，a の値を求めます。

$y=ax^2$ に $x=2$，$y=8$ を代入すると，$8=a\times 2^2$

$a=2$

したがって，x と y の関係式は，$y=2x^2$

$x=-4$ のときの y の値は，$y=2x^2$ に $x=-4$ を代入して，

$y=2\times(-4)^2=32$

チェック A　y が x の 2 乗に比例する関数について，学習しよう。

1 半径 x cm の円の面積を y cm^2 とするとき，次の問いに答えなさい。（円周率は π とします。）

※□ (1)　y を x の式で表しなさい。

$y=$ ……………

□ (2)　(1)の関数の比例定数を答えなさい。

……………

□ (3)　次の対応表を完成しなさい。

x	1	2	3	4	5	6
y						

2 次の問いに答えなさい。

※□ (1)　関数 $y=3x^2$ で，$x=2$ のときの y の値を求めなさい。

$y=$ ……………

□ (2)　関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ で，$x=-4$ のときの y の値を求めなさい。

$y=$ ……………

※□ (3)　関数 $y=x^2$ で，y の値が 4 となるような x の値をすべて求めなさい。

$x=$ ……………

チェック B　y が x の 2 乗に比例する関数の比例定数の求め方を練習しよう。

1 次の問いに答えなさい。

※□ (1)　y は x の 2 乗に比例し，$x=1$ のとき，$y=3$ です。y を x の式で表しなさい。

$y=$ ……………

※□ (2)　y は x の 2 乗に比例し，$x=2$ のとき，$y=-4$ です。y を x の式で表し，$x=-3$ のときの y の値を求めなさい。

$y=$ ……………

$y=$ ……………

□ (3)　y は x の 2 乗に比例し，$x=3$ のとき，$y=3$ です。$x=6$ のときの y の値と，$y=6$ となる x の値をそれぞれ求めなさい。

$y=$ ……………

$x=$ ……………

ポイント 2 yがxの2乗に比例する関数のグラフと変域について，学習しよう。

Q 次の関数のグラフをかき，その特徴を調べてみよう。

$y=\frac{1}{2}x^2$　　　　$y=-\frac{1}{2}x^2$

A xとyの対応表をつくり，x，yの値の組を座標とする点をとります。

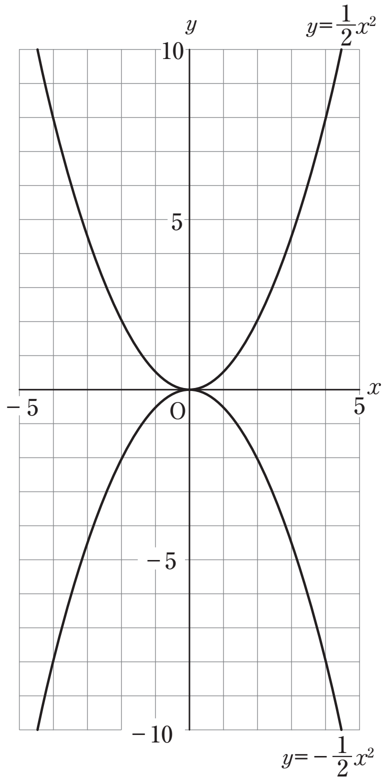
$y=\frac{1}{2}x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

$y=-\frac{1}{2}x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8

さらに細かく点をとっていくと，右のグラフのような，なめらかな曲線となります。



◆$y=ax^2$ のグラフの特徴◆

● $y=ax^2$ のグラフを放物線という。放物線の対称軸を，放物線の軸，放物線と放物線の軸との交点を頂点といいます。

① 原点を通り，y 軸について対称です。

② $a>0$ のとき，上に開き，$a<0$ のとき，下に開きます。

Q 次の関数の y の変域を，グラフを利用して調べてみよう。

$y=x^2(-3\leqq x\leqq 2)$　　　　$y=-\frac{1}{4}x^2(-2\leqq x\leqq 4)$

A 関数 $y=x^2$ で，$x=-3$ のとき，$y=9$

$x=2$ のとき，$y=4$

よって，$y=x^2$ $(-3\leqq x\leqq 2)$のグラフは，右の図の放物線の実線部分となります。

→関数 $y=x^2$ で，$-3\leqq x\leqq 2$ のときの y の変域は，

$0\leqq y\leqq 9$

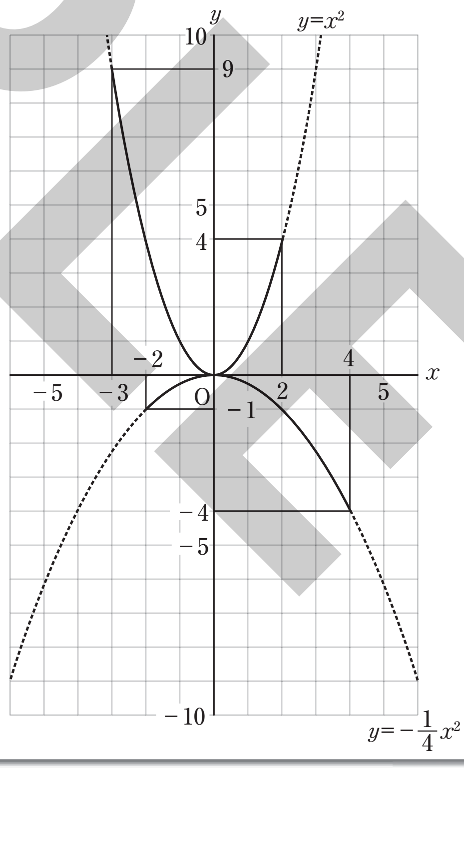
関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ で，$x=-2$ のとき，$y=-1$

$x=4$ のとき，$y=-4$

よって，$y=-\frac{1}{4}x^2(-2\leqq x\leqq 4)$のグラフは，右の図の放物線の実線部分となります。

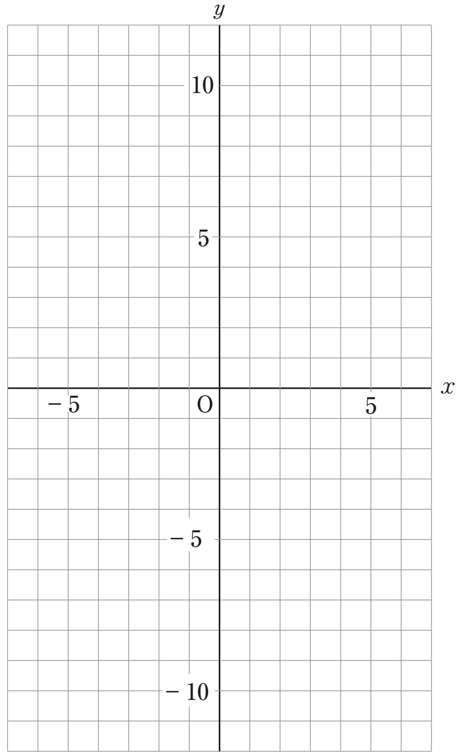
→関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ で，$-2\leqq x\leqq 4$ のときのyの変域は，

$-4\leqq y\leqq 0$



チェック A　$y=ax^2$ のグラフをかき，その特徴を調べよう。

1 次の問いに答えなさい。



□ (1)　次の関数のグラフをかきなさい。

※□ ①　$y=2x^2$　　□ ②　$y=-2x^2$

※□ ③　$y=\frac{3}{4}x^2$ $(-4 \leqq x \leqq 3)$　　□ ④　$y=-\frac{1}{3}x^2$ $(-3 \leqq x \leqq 6)$

□ (2)　(1)の①と②のグラフは，どんな位置関係にありますか。

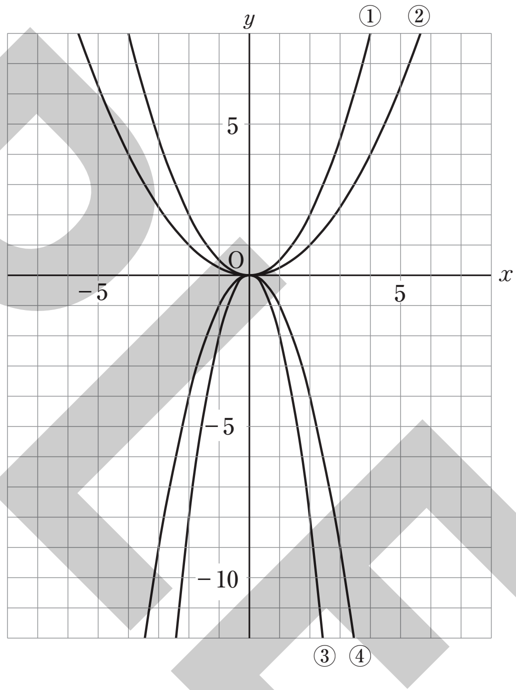
※□ (3)　(1)の③と④のグラフで，y の変域を求めなさい。

③　　　　$\leqq y \leqq$

④　　　　$\leqq y \leqq$

チェック B　放物線についての問題を練習しよう。

1 右の放物線について，次の問いに答えなさい。



※□ (1)　①〜④の放物線の式をそれぞれ求めなさい。

①$y=$　　②$y=$

③$y=$　　④$y=$

※□ (2)　$x>0$ の範囲で，x の値が増加すると y の値も増加するものを選びなさい。

□ (3)　$x<0$ の範囲で，x の値が増加すると y の値も増加するものを選びなさい。

2 次の問いに答えなさい。

□ (1)　放物線 $y=x^2$ 上の点で，x 座標が 3 である点の y 座標を求めなさい。

※□ (2)　点$(-3,\ 6)$を通る放物線の式を求めなさい。

$y=$

ポイント 3 y が x の 2 乗に比例する関数の変化の割合について，調べてみよう。

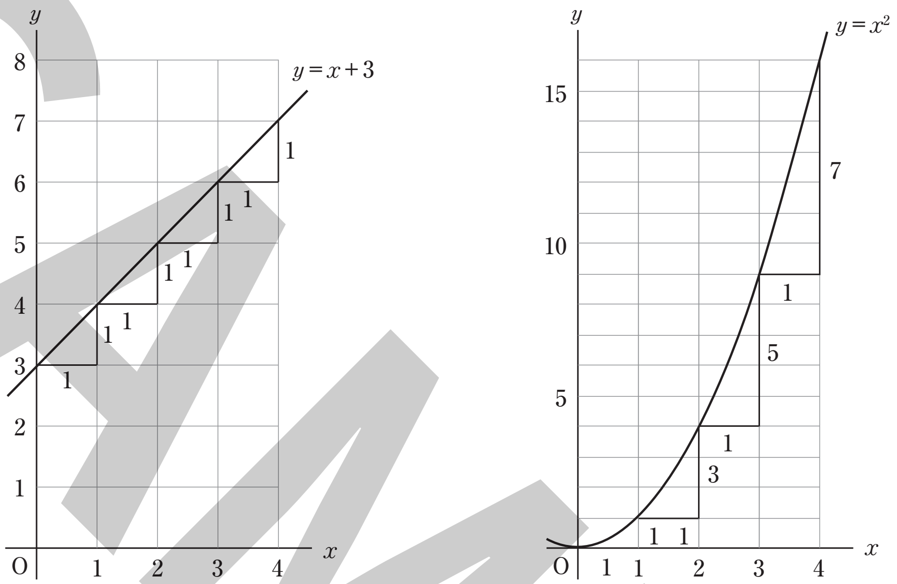
Q 次の 2 つの関数について，x の値が 1 ずつ増加したときの y の値の増加量を調べてみよう。

$y=x+3$　　　　$y=x^2$

A x の増加量に対する y の増加量の割合を，変化の割合といいました。

つまり，変化の割合 $=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ です。

グラフ上の，$x>0$ の範囲でみると，次のようになります。



以上から，関数 $y=x+3$ の変化の割合は一定ですが，関数 $y=x^2$ の変化の割合は，どの値からどの値まで増加するかによって，異なってくることがわかります。

例題 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ について，x の値が 2 から 6 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(2) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合は -2 です。a の値を求めなさい。

解き方 **変化の割合 $=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ です。**

(1) x の増加量 $=6-2=4$ ……①

$x=2$ に対応する y の値 $=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$

$x=6$ に対応する y の値 $=\dfrac{1}{2}\times 6^2=18$

→ y の増加量 $=18-2=16$ ……②

変化の割合 $=\dfrac{②}{①}=\dfrac{16}{4}=4$

(2) x の増加量 $=3-1=2$ ……①

$x=1$ に対応する y の値 $=a\times 1^2=a$

$x=3$ に対応する y の値 $=a\times 3^2=9a$

→ y の増加量 $=9a-a=8a$ ……②

変化の割合 $=\dfrac{②}{①}=\dfrac{8a}{2}=4a \rightarrow 4a=-2 \rightarrow a=-\dfrac{1}{2}$

チェック A 関数の変化の割合について学習しよう。

1 関数 $y=x^2$ について，次の問いに答えなさい。

□ (1) $x=2$，$x=5$ に対応する y の値をそれぞれ求めなさい。

$x=2$ に対応する y の値＝　　　　，$x=5$ に対応する y の値＝

□ (2) x の値が 2 から 5 まで増加するときの y の増加量を求めなさい。

※□ (3) x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

2 関数 $y=-x^2$ について，x の値が次のように増加するとき，①x の増加量，②y の増加量，③変化の割合をそれぞれ求めなさい。

□ (1) 3 から 5

①

②

③

※□ (2) -4 から -1

①

②

③

チェック B 関数の変化の割合について学習しよう。

1 次の問いに答えなさい。

※□ (1) 関数 $y=2x^2$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

□ (2) 関数 $y=-2x^2$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

□ (3) 関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ について，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

※□ (4) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合は 1 です。a の値を求めなさい。

$a=$

練成問題

1 次の問いに答えなさい。　ポイント①

※□(1)　y は x の 2 乗に比例し，$x=2$ のとき，$y=3$ です。y を x の式で表しなさい。

$y=$

□(2)　y は x の 2 乗に比例し，$x=3$ のとき，$y=-9$ です。y を x の式で表しなさい。

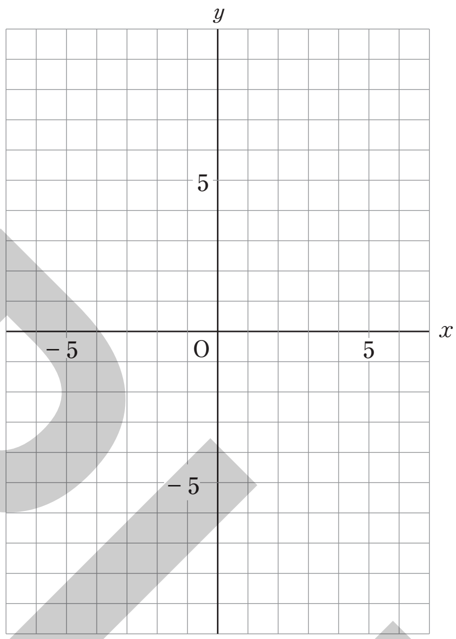
$y=$

□(3)　y は x の 2 乗に比例し，$x=-3$ のとき，$y=12$ です。$x=2$ のときの y の値を求めなさい。

$y=$

2 下のア，イの関数について，次の問いに答えなさい。　ポイント②

ア　$y=x^2$　　　イ　$y=-\frac{1}{4}x^2$



※□(1)　ア，イの関数のグラフを，右の図にかきなさい。

□(2)　$x>0$ の範囲で，x の値が増加すると，y の値は減少するのはどちらですか。

※□(3)　関数 $y=x^2$ の x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域を求めなさい。

$\leqq y \leqq$

□(4)　関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ の x の変域が $-6 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域を求めなさい。

$\leqq y \leqq$

3 次の問いに答えなさい。　ポイント③

□(1)　関数 $y=3x^2$ について，x の値が次のように変化するときの変化の割合を求めなさい。

※□①　1 から 2 まで　　　□②　-1 から 2 まで

□(2)　関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x の値が次のように変化するときの変化の割合を求めなさい。

※□①　2 から 4 まで　　　□②　-2 から 6 まで

※□(3)　関数 $y=ax^2$ について，x の値が -1 から 3 まで増加するときの変化の割合は 8 です。このとき，a の値を求めなさい。

$a=$

確認テスト

得点 ／50

1 y は x の 2 乗に比例し，$x=4$ のとき，$y=-32$ です。次の問いに答えなさい。

□ (1) y を x の式で表しなさい。

□ (2) $x=-3$ のときの y の値を求めなさい。

□ (3) $y=-8$ となる x の値を求めなさい。

2 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，次の問いに答えなさい。

□ (1) x の変域が次の①，②のとき，y の変域を求めなさい。

□ ① $2 \leqq x \leqq 4$

□ ② $-2 \leqq x \leqq 6$

□ (2) $x>0$ の範囲で，x の値が増加すると y の値は増加するか，それとも減少するか答えなさい。

3 次の問いに答えなさい。

□ (1) 関数 $y=-x^2$ について，x の値が次のように変化するときの変化の割合を求めなさい。

□ ① -3 から -1 まで

□ ② -1 から 2 まで

□ ③ 2 から 5 まで

□ (2) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合は -3 です。このとき，a の値を求めなさい。

1 【各5点×3】

(1)	$y=$
(2)	$y=$
(3)	$x=$

2 【各5点×3】

(1)	① $\leqq y \leqq$
	② $\leqq y \leqq$
(2)	

3 【各5点×4】

(1)	①
	②
	③
(2)	$a=$