17 2乗に比例する関数

学習日　　月　　日

Point 1 2乗に比例する関数

● **2次関数**…… y が x の2次式で表される関数を2次関数という。
したがって，2次関数の一般式は $y=ax^2+bx+c$（a，b，c は定数，$a \neq 0$）である。

● **2乗に比例する関数**…… y が x の2次関数であるもののうち，$b=c=0$ のとき，すなわち，$y=ax^2$ のときを特に，y が x^2 に比例する関数といい，a を比例定数という。
この関係は，比例と1次関数の関係と同様である。

例 1辺の長さが x cm の正方形の面積を y cm^2 とすると，x，y の関係式は $y=x^2$ となる。
したがって，y は x^2 に比例し，比例定数は1である。

● **2乗に比例する関数の特徴**……関数 $y=ax^2$ において，次のことが成り立つ。

① $x \neq 0$ のとき，$\dfrac{y}{x^2}$ の値は一定で，a の値に等しい。

② x の値が n 倍になると，y の値は n^2 倍になる。

例 関数 $y=x^2$ の x，y の値の対応

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

確認問題 1 次の問いに答えなさい。

※□(1) 直角二等辺三角形の等しい辺の長さを x cm，その面積を y cm^2 とする。

□① x と y の対応を表した次の表の空欄にあてはまる数を入れなさい。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y								

□② x の値が2倍，3倍になると，y の値はそれぞれ何倍になるか答えなさい。

□③ y を x の式で表しなさい。

※□(2) 次の y を x の式で表し，y が x の2乗に比例するものに○，そうでないものに×をつけなさい。

□① 1辺が x cm の立方体の表面積を y cm^2 とする。

□② 周囲の長さが 24 cm の長方形の縦の長さを x cm，面積を y cm^2 とする。

□③ 底面の円の半径が x cm，高さが 6 cm の円錐の体積を y cm^3 とする。

□(3) 次から y が x の2乗に比例するものをすべて選び，その比例定数を答えなさい。

ア $y=-x^2+1$　　イ $y=5x^2$　　ウ $y=2(x^2-1)$　　エ $x^2y=3$

オ $\dfrac{y}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$　　カ $x^2:y=3:5$　　キ $y-1=-2x^2-1$　　ク $y=(x+1)^2$

Point ❷ 関数 $y=ax^2$ の比例定数

例題 y が x の２乗に比例し，$x=4$ のとき $y=-12$ である。$x=-2$ のときの y の値と，$y=-27$ となる x の値を求めなさい。

解き方 y が x の 2 乗に比例するときには，比例定数を a として，$y=ax^2$ とおく。

(i) $y=ax^2$ とおき，$x=4$，$y=-12$ を代入 → $-12=a\times 4^2$

→ $-12=16a$ → $a=-\dfrac{3}{4}$

(ii) 関数の式は $y=-\dfrac{3}{4}x^2$ だから，ここに $x=-2$ を代入すると，

$$y=-\frac{3}{4}\times(-2)^2=-3$$

$y=-27$ を代入すると，$-27=-\dfrac{3}{4}x^2$ → $x^2=36$ → $x=\pm 6$

答 $y=-3$，$x=\pm 6$

確認問題 2 次の問いに答えなさい。

□(1) 関数 $y=x^2$ について，次の①～③の x の値に対応する y の値を求めなさい。また，y の値が④～⑥となる x の値を求めなさい。

※□① $x=8$　　□② $x=-3$　　□③ $x=-\dfrac{2}{3}$

※□④ $y=1$　　□⑤ $y=0$　　□⑥ $y=10$

□(2) 関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ について，次の①～③の x の値に対応する y の値を求めなさい。また，y の値が④～⑥となる x の値を求めなさい。

※□① $x=4$　　□② $x=-6$　　□③ $x=-\dfrac{1}{2}$

※□④ $y=-2$　　□⑤ $y=0$　　□⑥ $y=-12$

□(3) y が x の 2 乗に比例し，$x=-4$ のとき $y=4$ である。

※□① y を x の式で表しなさい。

□② $x=2$ のときの y の値を求めなさい。

□③ $y=9$ となる x の値を求めなさい。

※□(4) y が x の 2 乗に比例し，$x=2$ のとき $y=2$ である。$x=-4$ のときの y の値を求めなさい。

□(5) y が x の 2 乗に比例し，$x=-2$ のとき $y=-8$ である。$x=4$ のときの y の値を求めなさい。

□(6) y が x の 2 乗に比例し，$x=3$ のとき $y=27$ である。$y=12$ となる x の値を求めなさい。

□(7) y が x の 2 乗に比例し，$x=-3$ のとき $y=-6$ である。$y=-12$ となる x の値を求めなさい。

Point ③ 関数 $y=ax^2$ のグラフ

関数 $y=ax^2$ のグラフ…… $y=ax^2$ のグラフは，放物線と呼ばれるなめらかな曲線になる。

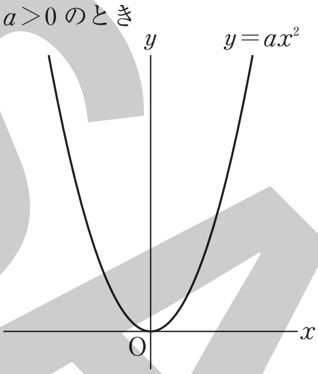
① 原点 O を通り，y 軸について対称な放物線である。

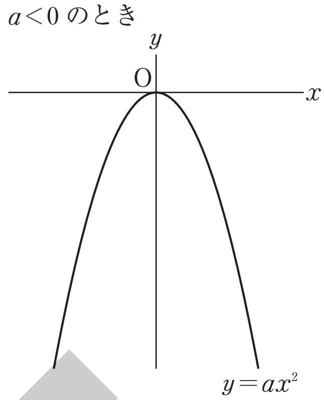
＊ O を放物線 $y=ax^2$ の頂点，対称軸を放物線 $y=ax^2$ の軸という。

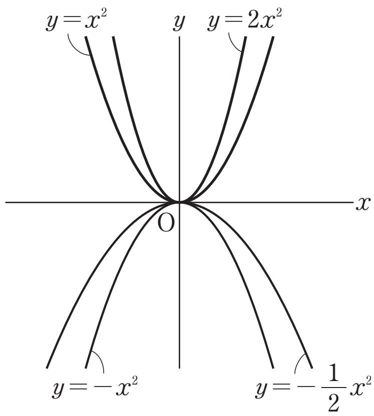
② $a>0$ のとき，$y \geqq 0$ で，グラフは上に開く。

$a<0$ のとき，$y \leqq 0$ で，グラフは下に開く。

③ a の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は狭くなり，y 軸に近づく。







関数 $y=ax^2$ のグラフのかき方……対応する x，y の値の組を多数求め，その値の組を座標とする点を，なめらかな曲線で結ぶ。

放物線 $y=ax^2$ の式の求め方……放物線が通る 1 点の座標を読み取り，その x 座標，y 座標の値を，$y=ax^2$ に代入して a の値を求める。

確認問題 3 次の問いに答えなさい。

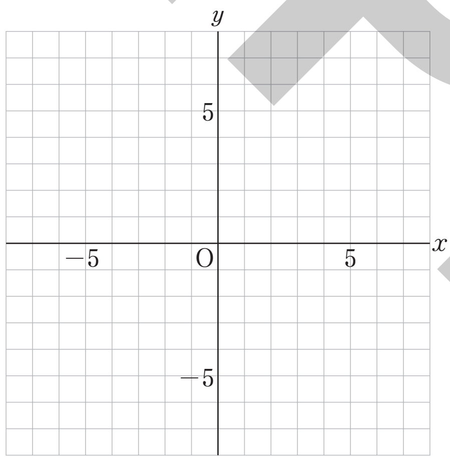
□(1) 次の関数のグラフをかきなさい。

※□① $y=x^2$

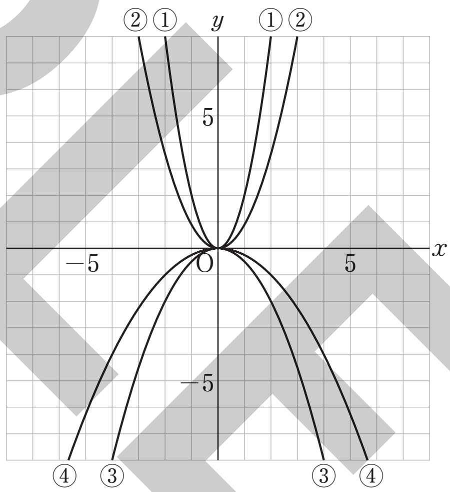
※□② $y=-3x^2$

□③ $y=\dfrac{1}{2}x^2$

□④ $y=-x^2$



※□(2) 右の放物線①～④の式を求めなさい。



□(3) 放物線 $y=2x^2$ 上の点で，x 座標が 2 である点の y 座標を求めなさい。

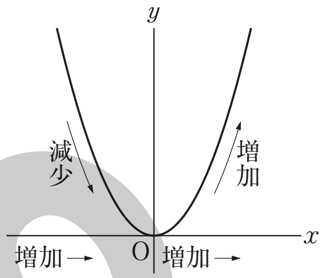
※□(4) 原点 O(0, 0) を頂点とし，点 (3, 4) を通る放物線の式を求めなさい。

□(5) 原点 O を頂点とし，点 (2, −1) を通る放物線上の点で，x 座標が 6 である点の y 座標を求めなさい。

Point 4　関数の値と変域

関数 $y=ax^2$ の値の変化……$x<0$ のときと，$x>0$ のときで，y の値の増減の仕方が変わる。

① $y=ax^2$（$a>0$）



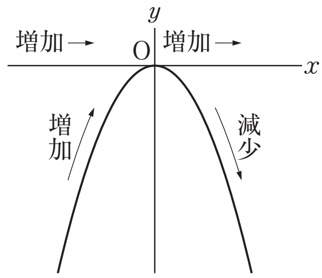
⇨ $x=0$

↓

y は最小値 0

x	−	0	＋
y	↘	0	↗

② $y=ax^2$（$a<0$）



⇨ $x=0$

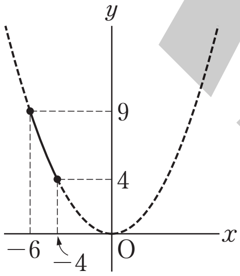
↓

y は最大値 0

x	−	0	＋
y	↗	0	↘

関数 $y=ax^2$ の変域……1次関数の y の変域の両端の値は，x の変域の両端の値に対応したが，関数 $y=ax^2$ では，$x<0$ と $x>0$ で y の値の増減の仕方が変わるため，x の変域が 0 をまたぐときには，$a>0$ のとき最小値が 0，$a<0$ のとき最大値が 0 となる。

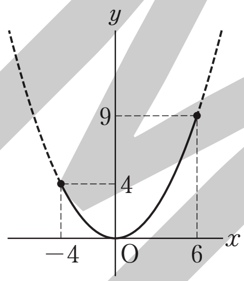
例 ① $y=\frac{1}{4}x^2$　　② $y=-\frac{1}{4}x^2$



$-6\leqq x\leqq -4$

↓

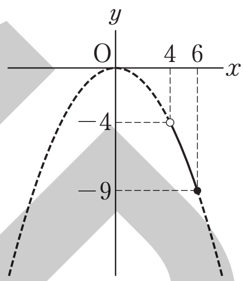
$4\leqq y\leqq 9$



$-4\leqq x\leqq 6$

↓

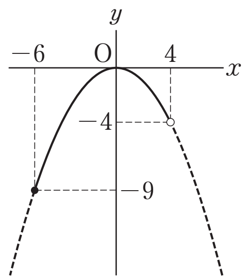
$0\leqq y\leqq 9$



$4<x\leqq 6$

↓

$-9\leqq y<-4$



$-6\leqq x<4$

↓

$-9\leqq y\leqq 0$

確認問題 4　次の問いに答えなさい。

※□(1) 次のうち，$x<0$ のとき，x が増加すると y が減少するものをすべて選びなさい。

ア $y=-x^2$　　イ $y=3x^2$　　ウ $y=\frac{1}{5}x^2$　　エ $y=-\frac{1}{2}x^2$　　オ $y=-\frac{2}{5}x^2$

※□(2) 次のうち，$x=0$ のとき，y が最大値をとるものをすべて選びなさい。

ア $y=4x^2$　　イ $y=-2x^2$　　ウ $y=-\frac{3}{4}x^2$　　エ $y=5x^2$　　オ $y=-\frac{1}{3}x^2$

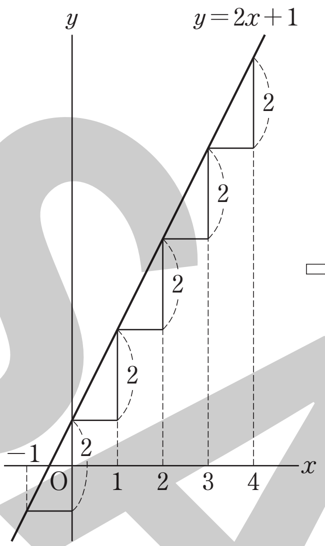
□(3) 関数 $y=2x^2$ と $y=-x^2$ について，x の変域が次のようなとき，y の変域を求めなさい。

□① $-2<x<-1$　　※□② $1\leqq x\leqq 6$

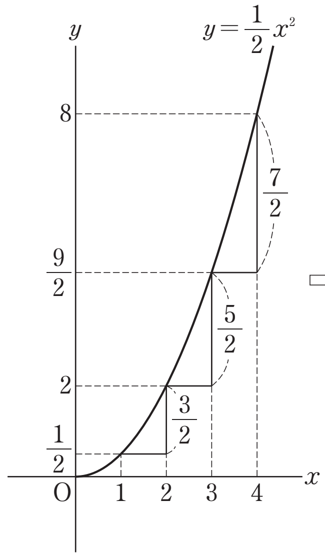
※□③ $-1\leqq x\leqq 5$　　□④ $-4<x<2$

Point 5　変化の割合

変化の割合……1次関数の変化の割合 $\left(=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}\right)$ は一定であるが，関数 $y=ax^2$ の変化の割合は一定ではない。



⇨ 関数 $y=ax+b$
変化の割合はつねに一定であり，その値は，直線の傾きに等しい。



⇨ 関数 $y=ax^2$
変化の割合は一定ではない。

〈参考〉 関数 $y=ax^2$ について，x の値が p から q まで増加したときの変化の割合

→ $x=p$ のとき $y=ap^2$，$x=q$ のとき $y=aq^2$ であるから，

$$\text{変化の割合}=\frac{aq^2-ap^2}{q-p}=\frac{a(q+p)(q-p)}{q-p}=a(p+q)$$

確認問題5 次の問いに答えなさい。

※□(1) 関数 $y=x^2$ について

□① $x=2$，$x=5$ に対応する y の値をそれぞれ求めなさい。

□② x の値が2から5まで増加するときの y の増加量を求めなさい。

□③ x の値が2から5まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

□(2) 関数 $y=2x^2$ と関数 $y=-x^2$ について，x の値が次のように増加したときの変化の割合を求めなさい。

※□① 0から3まで　　※□② -3 から -1 まで　　□③ -5 から2まで

※□(3) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が -1 から3まで増加するときの変化の割合が4である。このとき，a の値を求めなさい。

□(4) 2つの関数 $y=ax^2$ と $y=-3x+2$ について，x の値が2から4まで増加するときの変化の割合が等しいという。このとき，a の値を求めなさい。

練成問題 A

※ **1** **次の y を x の式で表しなさい。また，y が x の 2 乗に比例するものについて，比例定数を答えなさい。ただし，円周率は π とする。** ➡ Point ❶

□(1) 底辺が 3 cm，高さが x cm の平行四辺形の面積を y cm² とする。

□(2) 半径 x cm の円の面積を y cm² とする。

□(3) 1 辺が x cm の立方体の体積を y cm³ とする。

□(4) 底面が 1 辺 x cm の正方形で，高さが 6 cm の正四角錐の体積を y cm³ とする。

2 **次の問いに答えなさい。** ➡ Point ❷

※□(1) y が x の 2 乗に比例し，$x=2$ のとき $y=12$ である。

□① y を x の式で表しなさい。

□② $x=-3$ のときの y の値を求めなさい。

□(2) y は x の 2 乗に比例し，$x=2$ のとき $y=-2$ である。$y=-18$ となる x の値を求めなさい。

3 **次の問いに答えなさい。** ➡ Point ❸

□(1) 次の点が放物線 $y=-2x^2$ 上にあるとき，m の値を求めなさい。

※□① $(3,\ m)$

□② $(-5,\ m)$

※□③ $(m,\ -50)$

□④ $(m,\ -48)$

□(2) 放物線 $y=ax^2$ が次の点を通るとき，a の値を求めなさい。

※□① $(3,\ 18)$

□② $(-6,\ 12)$

※□③ $(-2,\ -12)$

□④ $(-4,\ -8)$

4 **次の関数の y の変域を求めなさい。** ➡ Point ❹

※□(1) $y=3x^2\ (3 \leqq x \leqq 5)$

※□(2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2\ (-4 \leqq x \leqq 2)$

□(3) $y=-4x^2\ (-1 < x < 2)$

5 **関数 $y=2x^2$ と関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。** ➡ Point ❺

※□(1) -6 から -3

□(2) -2 から 1

※□(3) 1 から 3

□(4) 2 から 5

練成問題 B

1 次の問いに答えなさい。

※□(1) 次の関数のグラフについて

ア $y=-\frac{1}{4}x^2$　イ $y=6x^2$　ウ $y=\frac{1}{3}x^2$　エ $y=-4x^2$

オ $y=x^2$　カ $y=\frac{1}{4}x^2$　キ $y=-x^2$　ク $y=-\frac{1}{8}x^2$

□① グラフの開き方が最も大きいものと最も小さいものをそれぞれ選びなさい。

□② x 軸について互いに対称なものの組を答えなさい。

□③ x の変域を数全体としたとき，y の最小値が定まるものを選びなさい。

□(2) 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=-4$ は 2 点 A，B で交わり，線分 AB の長さは 4 である。

※□① a の値を求めなさい。

□② この放物線と直線 $y=-8$ との交点の座標を求めなさい。

2 次の問いに答えなさい。

※□(1) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が 1 から 2 まで増加するときの変化の割合が 6 であるとき，a の値を求めなさい。

□(2) 関数 $y=3x^2$ について，x の値が p から $p+2$ まで増加したときの変化の割合が 24 であった。このとき，p の値を求めなさい。

□(3) 2 つの関数 $y=x^2$ と $y=6x-1$ について，x の値が a から $a+2$ まで増加したときの変化の割合が等しいという。このとき，a の値を求めなさい。

3 次の問いに答えなさい。

※□(1) 関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-6 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 12$ である。このとき，a の値を求めなさい。

□(2) x の変域が $-3 \leqq x \leqq 6$ のとき，2 つの関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=ax+b$ の y の変域が一致する。

□① $a>0$ のとき，a，b の値を求めなさい。

□② $a<0$ のとき，a，b の値を求めなさい。

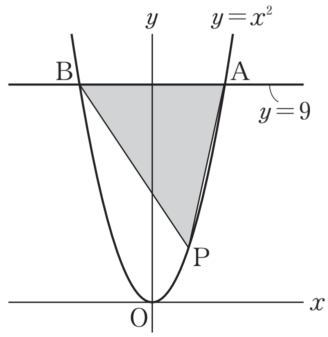
4 次の問いに答えなさい。

※(1) 図1のように，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=9$ とが2点A，Bで交わっている。放物線上のOからAの間に点Pをとり，△ABPをつくったところ，その面積が15となった。

① 2点A，Bの座標を求めなさい。

② 点Pの座標を求めなさい。

図1

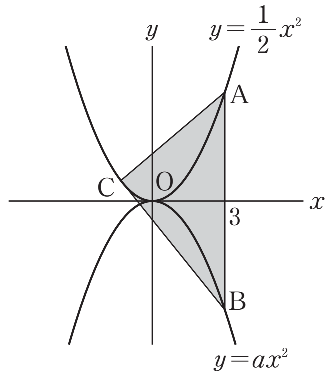


(2) 図2の放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=ax^2$ は，x 軸について対称である。x 軸上の点 $(3,\ 0)$ を通り y 軸に平行な直線をひき，2つの放物線との交点を図のようにA，Bとする。

① a の値を求めなさい。

② 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ の $x<0$ の部分に点Cをとり，△ABCの面積を18となるようにするとき，点Cの座標を求めなさい。

図2



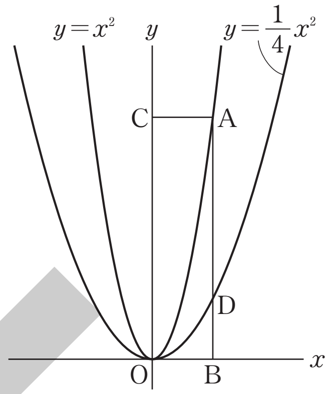
※(3) 図3のように，放物線 $y=x^2$ の $x>0$ の部分に点Aをとり，Aから x 軸，y 軸に下ろした垂線をそれぞれAB，ACとし，線分ABと放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ との交点をDとする。

① AC＝4のとき，点Dの座標を求めなさい。

② Bの x 座標を b とするとき，線分AB，BDの長さを b の式で表しなさい。

③ AD＝27のとき，台形ACODの面積を求めなさい。

図3



(4) 図4のように，2つの放物線 $y=x^2$ と $y=-\frac{1}{2}x^2$ 上にADとBCが x 軸と平行になるように，4点A，B，C，Dをとり，四角形ABCDをつくる。

① 点Aの x 座標が -2 で，四角形ABCDが長方形であるとき，点Cの座標を求めなさい。

② 四角形ABCDが正方形となるとき，点Aの座標を求めなさい。

③ 点A，Bの x 座標がそれぞれ -1，-2 であるとき，台形ABCDの面積を求めなさい。

④ 台形ABCDの高さが6，面積が24であるとき，点Dの座標を求めなさい。

図4